MAT 5798 – Medida e Integração
IME – 2017

`http://www.ime.usp.br/~glaucio/mat5798`
`Notas da Aula 1 (14/3)`

I) `Henri Lebesgue, 1902: Intégrale, Longueur, Aire.`

II) `O Problema da Medida`

DEFINIÇÃO 1. Seja X um conjunto. Uma *função de conjuntos em* X é uma função cujo domínio é um subconjunto de $2^X = \mathbb{P}(X)$.

DEFINIÇÃO 2. Seja X um conjunto e $\mu : \mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X) \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $[0, \infty]$). Diz-se que μ é:

(i) *finitamente aditiva* se

$$\left.\begin{array}{c} A_1, \cdots, A_n \text{ disjuntos em } \mathcal{A} \\ A = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

(ii) *σ-adivtiva* (ou *enumeravelmente aditiva*) se

$$\left.\begin{array}{c} (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ família disjunta em } \mathcal{A} \\ A = \dot{\bigcup}_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

- Tentativa de se definir um "volume n-dimensional" em $\mathbb{R}^n$: uma ideia natural é tomar $\mu : \mathbb{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ tal que
  (i) μ σ-aditiva (ou (i') finitamente aditiva)
  (ii) Se A congruente a B em $\mathbb{R}^n$, $\mu(A) = \mu(B)$
  (iii) $\mu([0, 1]^n) = 1$
- Para $n \geq 3$, seja com (i) ou com (i'), não existe uma tal μ.

TEOREMA 1 (paradoxo de Banach-Tarski). Sejam U, V abertos limitados em $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$). Então $\exists k \in \mathbb{N}$ e

* $E_1, \cdots, E_k$ disjuntos em $\mathbb{R}^n$ cuja reunião é U
* $F_1, \cdots, F_k$ disjuntos em $\mathbb{R}^n$ cuja união é V
* E_i congruente a F_i para $1 \leq i \leq n$

- Remediaremos esta situação, definindo-se μ num domínio menor que o conjunto das partes.

III) `Preliminares`

- Linguagem da teoria dos conjuntos: seção 0 do Folland.
- A reta estendida:

$$\overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

- Relação de ordem em $\overline{\mathbb{R}}$: $a < b$ se
  (i) $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ ou
  (ii) $a = -\infty$, $b \neq -\infty$ ou
  (iii) $b = +\infty$, $a \neq +\infty$
- $<$ é uma relação de ordem *total* (i.e. quaisquer dois elementos se comparam) e *completa* (i.e. todo conjunto não vazio e limitado superiormente admite supremo). Além disso, todo conjunto não vazio é limitado superiormente (por $+\infty$) e inferiormente (por $-\infty$), portanto admite supremo e ínfimo.
- Em $\overline{\mathbb{R}}$, consideramos a topologia da ordem, i.e., gerada pela sub-base:

$$\{\underbrace{\{x \in \overline{\mathbb{R}} | x < a\}}_{=L_a}, \underbrace{\{x \in \overline{\mathbb{R}} | x > b\}}_{=R_b} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

  – Uma base para a referida topologia é $\{L_a, R_b, L_a \cap R_b : a, b \in \mathbb{R}\}$
- Com a topologia acima, $\overline{\mathbb{R}}$ é um espaço metrizável, compacto (é uma compactificação de $\mathbb{R}$). Além disso, as operações $+ : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \backslash \{(+\infty, -\infty), (-\infty, +\infty)\} \to \overline{\mathbb{R}}$ e $\cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \backslash \{(\pm\infty, 0), (0, \pm\infty)\} \to \overline{\mathbb{R}}$, definidas da maneira óbvia, são contínuas.

- Seja $\{x_n\}_n$ sequência em $\overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\lim} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} x_k$$
$$\underline{\lim} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} x_k = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} x_k$$

(A sequência é convergente se e somente se o limite superior é igual ao limite inferior. É a mesma definição que na reta.)

- Analogamente, dada $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ e $a\in\mathbb{R}$:

$$\overline{\lim}_{x\to a} f(x) = \inf_{\delta>0} \sup\{f(x) : 0 < |x-a| < \delta\}$$
$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \sup_{\delta>0} \inf\{f(x) : 0 < |x-a| < \delta\}$$

Definição 3. $0\cdot\pm\infty \doteq 0$ e $\pm\infty\cdot 0 \doteq 0$

- *Atenção*: $\cdot : \overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}\to\overline{\mathbb{R}}$ não é contínua em $(0,\pm\infty)$ e $(\pm\infty,0)$.
  * De fato: Tome $(x_n,y_n)\doteq(+\infty,\frac{1}{n})$. Então:

$$(x_n,y_n)\to(+\infty,0)$$
$$x_n\cdot y_n = \infty \neq +\infty\cdot 0 = 0$$

- *Observação*: $\cdot :[0,\infty]\times[0,\infty]\to[0,\infty]$ obtida por restrição:
  * é "upward continuous", ou seja:

$$\text{se } \begin{cases} x_n\uparrow x \text{ em } [0,\infty] \\ y_n\uparrow y \text{ em } [0,\infty] \end{cases} \quad \text{então } x_n\cdot y_n \to x\cdot y$$

  * não é "downward continuous":

$$x_n = +\infty$$
$$y_n = \frac{1}{n}$$

  é tal que $x_n\downarrow+\infty$, $y_n\downarrow 0$ mas $x_n\cdot y_n = +\infty$.
  * Essa assimetria surge pela forma como se definiu $0\cdot\pm\infty = 0$ e acarretará outras assimetrias mais adiante.

IV) `Classes de Conjuntos`

Definição 4. Sejam X um conjunto $\emptyset \neq \mathcal{A}\in\mathbb{P}(X)$. Diz-se que $\mathcal{A}$ é uma *álgebra* (respectivamente, uma *σ-álgebra*) se for fechada por complementação, i.e., $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c = X\backslash A\in\mathcal{A}$, e por união finita, i.e., $A,B\in\mathcal{A}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{A}$ (respectivamente, por união enumerável, i.e. se $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathcal{A}$, $\cup_{i\in\mathbb{N}}A_i\in\mathcal{A}$).

Exemplo 1. Seja X um conjunto.

(a) $\mathbb{P}(X)$ é uma σ-álgebra

(b) $\{\emptyset,X\}\subset\mathbb{P}(X)$ é uma σ-álgebra

(c) $\mathcal{A}\doteq\{A\subset X|A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}$ é uma álgebra:

  (i) $A\in\mathcal{A}\Rightarrow A^c\in\mathcal{A}$, trivialmente

  (ii) Sejam $B,C\in\mathcal{A}$
  - Se ambos forem finitos, $B\cup C$ é finito
  - Se um deles for cofinito, $B\cup C$ é cofinito

  Em qualquer dos casos, $B\cup C\in\mathcal{A}$. Se X for infinito, $\mathcal{A}$ não é uma σ-álgebra.

(d) $\mathcal{A}\doteq\{A\subset X|A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}$ é σ-álgebra.

Proposição 1. Seja $\mathcal{A}$ σ-álgebra de conjuntos de X. Tem-se:

(i) $\emptyset, X\in\mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A}$ é fechada por intersecção enumerável.

Demonstração. (i) é imediato e (ii) segue das *Regras de Morgan*:
Seja $(A_\alpha)_{\alpha\in A}$ família em $\mathbb{P}(X)$, então:

$$\left(\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in A} A_\alpha^c$$
$$\left(\bigcap_{\alpha\in A} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha^c$$

□

Notação.

a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec X$ para denotar $x : \mathbb{N} \to X$ (i.e. x é uma sequência a valores no conjunto X).
b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\cdot\, X$ para denotar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec X$ e $x_n \cap x_m = \emptyset$ se $n \neq m$ (assumindo que os elementos de X sejam conjuntos).

Proposição 2. Seja $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ uma álgebra. São equivalentes:

(a) $\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável.
(b) $\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável crescente, i.e. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec \mathcal{A}$ crescente $\Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.
(c) $\mathcal{A}$ é fechada por união enumerável disjunta, i.e. $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \prec\!\cdot\, \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

Proposição 3. Seja X um conjunto, $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha\in A}$ família de σ-álgebras de X. Então $\cap_{\alpha\in A}\mathcal{A}_\alpha \in \mathbb{P}(X)$ é uma σ-álgebra.

Definição 5. Sejam X conjunto, $S \subset \mathbb{P}(X)$. Pela proposição anterior existe uma σ-álgebra $\sigma(S) \subset \mathbb{P}(X)$ tal que:

(i) $S \subset \sigma(S)$
(ii) $\forall \mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ σ-álgebra com $S \subset \mathcal{A}$, $\sigma(S) \subset \mathcal{A}$.

A saber, $\sigma(S) = \cap\{\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X) | \mathcal{A}\ \sigma\text{-álgebra e } S \subseteq \mathcal{A}\}$. $\sigma(S)$ chama-se *σ-álgebra gerada por S*.

Observação 1. De forma análoga, dado $S \subset \mathbb{P}(X)$, faz sentido considerar faz sentido considerar a álgebra gerada por S: é a interseção de todas as álgebras que contém S.

Definição 6. Seja (X, τ) espaço topológico. A σ-álgebra $\sigma(\tau)$ chama-se σ-álgebra de Borel de (X, τ) e denota-se por $\mathcal{B}(X)$ ou $\mathcal{B}_X$.

V) `Aplicações Mensuráveis`

Definição 7. Um espaço mensurável é um par $(X, \mathcal{A})$ onde X é um conjunto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra.

Definição 8. Sejam $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis. Uma aplicação $\phi : X \to Y$ diz-se *mensurável* se $\forall B \in \mathcal{B}$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposição 4. Se, com a notação acima, $\mathcal{B} = \sigma(S)$, para que ϕ seja mensurável basta que, $\forall B \in S$, $\phi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Proposição 5. Sejam

$$(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\phi} (Y, \mathcal{B}) \xrightarrow{\psi} (Z, \mathcal{C})$$

aplicações mensuráveis entre espaços mensuráveis. Então $\psi \circ \phi$ é mensurável.

Observação 2 (Propriedades da pré-imagem). Seja $\phi : X \to Y$. Tem-se:

(i) Se $(A_\alpha)_{\alpha\in A}$ família da subconjuntos de Y, então:

$$\phi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in A} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A} \phi^{-1}(A_\alpha)$$
$$\phi^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in A} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in A} \phi^{-1}(A_\alpha)$$

(ii)

$$\forall A \subset Y,\ \phi^{-1}(A^c) = \left(\phi^{-1}(A)\right)^c$$