

Fato 1. Existe um conjunto S_ω que é bem-ordenado, não-enumerável, não possui máximo e tem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\text{Para toda sequência } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } S_\omega, \text{ existe } \alpha \in S_\omega \text{ tal que} \\ &x_n \leq \alpha, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1)$$

Além disso, os conjuntos $S_\alpha := \{x \in S_\omega : x < \alpha\}$ são enumeráveis, para qualquer $\alpha \in S_\omega$. Denote por $\overline{S_\omega} = S_\omega \cup \{\omega\}$, onde ω é tal que $x \leq \omega$, para todo $x \in S_\omega$ (ou seja, $\overline{S_\omega}$ agora tem um elemento máximo, ω). Assim, podemos escrever

$$S_\omega = [0, \omega) \subseteq \overline{S_\omega},$$

onde 0 denota o menor elemento de $\overline{S_\omega}$. Esta construção e mais algumas coisas estão na referência [1], página 66 em diante.

Topologia em $\overline{S_\omega}$. A família

$$\mathcal{B} = \{S_\alpha : \alpha < \omega\} \cup \{\overline{S_\omega}\}$$

constitui uma base para uma topologia em $\overline{S_\omega}$. De fato, esta família obviamente cobre $\overline{S_\omega}$ e dados $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, temos sempre $B_1 \cap B_2 = B_i$ para $i = 1$ ou 2 , de maneira que as condições necessárias para ser base são imediatamente satisfeitas. Seja τ a topologia resultante em $\overline{S_\omega}$. Note que $S_\omega \in \tau$, pois

$$S_\omega = \bigcup_{\alpha < \omega} S_\alpha.$$

As σ -álgebras geradas pela topologia e sua base. A σ -álgebra de Borel, gerada por τ , contém S_ω por definição. Contudo, a σ -álgebra gerada por $\mathcal{B}$, a base de τ , não contém S_ω . Para provar isto, vamos mostrar que existe uma σ -álgebra de subconjuntos de $\overline{S_\omega}$ que contém $\mathcal{B}$ mas **não** contém S_ω . Como por definição a σ -álgebra gerada por $\mathcal{B}$ é a **menor** σ -álgebra que contém $\mathcal{B}$, a afirmação segue.

Considere a família $\mathfrak{M}$ formada por todos os subconjuntos $X \subseteq \overline{S_\omega}$ que satisfazem **pelo menos uma** das condições abaixo:

$$\begin{aligned} (a) &\text{ Existe } \alpha < \omega \text{ tal que } X \subseteq [0, \alpha); \\ (b) &\text{ Existe } \beta < \omega \text{ tal que } [\beta, \omega] \subseteq X. \end{aligned} \quad (2)$$

Claramente, $\mathfrak{M}$ contém $\mathcal{B}$. Note que S_ω não satisfaz nem (a) nem (b), logo não está em $\mathfrak{M}$. Para ver que $\mathfrak{M}$ é σ -álgebra, note que dado $X \in \mathfrak{M}$, se X satisfaz (a), então X^c satisfaz (b), e vice-versa. Dada uma família enumerável $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ em $\mathfrak{M}$, se pelo menos um dos X_i satisfaz (b), então a união $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ também satisfaz (b). Senão, então todo X_i deve satisfazer (a); neste caso, podemos escrever $X_i \subseteq [0, \alpha_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela propriedade (1) enunciada no começo do texto, existe $\alpha < \omega$ tal que $\alpha_i < \alpha$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, a união $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ está contida em $[0, \alpha)$, e portanto satisfaz (a). Logo $\mathfrak{M}$ é uma σ -álgebra, como afirmado. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Munkres, J. R. *Topology, a first course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1975.