Estimativas para o primeiro autovalor do operador Laplaciano Aproximado

Sejam M uma variedade (de classe C^∞) riemanniana compacta orientável de dimensão n ($n \geq 2$) e ∇ a conexão Riemanniana de M. Neste trabalho nós estudamos os pontos críticos da energia de ∇ agindo sobre o espaço $C^\infty(TM)$ dos campos de vetores C^∞ de M com a norma L^2 igual a um. Mais precisamente, nós estudamos os pontos críticos do funcional

$$F(X) = \int_M \|\nabla X\|^2 \, dM$$

sobre o espaço dos campos de vetores $X \in C^\infty(TM)$ satisfazendo

$$\int_M \|X\|^2 \, dM = 1.$$

É bem conhecido que os valores críticos de F são autovalores do operador chamado Laplaciano Aproximado de M. Dado um subgrupo de Lie compacto, contido no grupo de isometrias de M, nós introduzimos um processo de $G-$simetrização de um campo de vetores de M e provamos que os pontos críticos do funcional energia restrito ao espaço dos campos $G-$invariantes são pontos críticos de F sobre o espaço de todos os campos de vetores diferenciáveis de M. Mostramos também que esta inclusão pode ser estrita: provamos que o ínfimo de F sobre $\mathbb{S}^3$ não é assumido por um campo de vetores $\mathbb{S}^3-$invariante. Provamos que o ínfimo de F sobre uma esfera $\mathbb{S}^n$, $n \geq 2$, de raios $1/k$, é k^2, e é assumido por um campo de vetores que é invariante pela ação do subgrupo de isotropia do grupo de isometrias do $\mathbb{S}^n$ em algum ponto de $\mathbb{S}^n$.

Para finalizar, apresentaremos alguns avanços no estudo de estimativas para o primeiro autovalor do operador Laplaciano Aproximado em uma semi-esfera, dando ênfase a um resultado no caso particular de $\mathbb{S}^3$.