$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios MAT 105

$1^{\underline{a}}$ Produto escalar, produto vetorial

1. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \rangle$.

2. Determine x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.

   (a) $\vec{u} = (x+1, 1, 2),\ \vec{v} = (x-1, -1, -2)$ $\qquad$ (b) $\vec{u} = (x, -1, 4),\ \vec{v} = (x, -3, 1)$.

3. São dadas as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   (a) $\vec{u} = (1, 0, 1),\ \vec{v} = (-2, 10, 2)$ $\quad$ (b) $\vec{u} = (3, 3, 0),\ \vec{v} = (2, 1, -2)$, $\quad$ (c) $\vec{u} = (-1, 1, 1),\ \vec{v} = (1, 1, 1)$.

4. Prove que:

   (a) $4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$, $\qquad$ (b) $2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

5. a). Prove que as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares se, e somente se, o paralelogramo é um losano.

   b). Prove que as diagonais de um paralelogramo têm comprimentos iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.

   c). Prove que as diagonais de um losano está contidas nas bissetrizes dos ângulos interiores.

   d). Prove que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogrammo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados.

   e). Prove que a diagonal maior de um paralelogramo é maior do que cada um dos quatro lados.

6. Prove que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ se somente se $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

7. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(2, -4, 6)$. Quais desse vetores forma ângulo agudo com $(1, 0, 0)$?

8. Dados $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ e $\vec{t} = (2, 1, -1)$, obtenha $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $\vec{t}$, tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja LD. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com $(-1, 0, 0)$.

9. A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $\frac{\pi}{3}$ e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule a norma de $\vec{u} \times \vec{v}$.

10. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.

11. Ache $\vec{x}$ tal que $\langle \vec{x}, 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 4\vec{e_3} \rangle = 9$ e $\vec{x} \times (-\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}) = -2\vec{e_1} + 2\vec{e_3}$.

12. Prove que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$.

13. * Prove que $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$

14. Prove que se $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

15. * Prove que a altura do tetraedro $ABCD$ relativa á base ABC

$$h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}.$$

16. Sabe-se que o vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{e_1} + \vec{e_2}$ e a $-\vec{e_1} + \vec{e_3}$, tem norma $\sqrt{3}$ e sendo θ ânguo entre $\vec{u}$ end $\vec{e_2}$, tem-se $\cos\theta > 0$, determine $\vec{u}$.

17. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.

    (a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

    (b) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow \vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos.

    (c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$.

18. Dado $\vec{b} = (1, 2, 1)$, determine $\vec{a}$ tal que $\vec{a}$ é ortogonal ao vetor $\vec{e_3}$ e $\vec{a} \times \vec{b} = (1, -1, 1)$.

19. Prove que $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$.

$2^{\underline{a}}$ Sistemas de coordenadas

1. Seja $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo. Sejam $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AF}$. Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H nos seguintes sistemas de coordenadas (a) $(A, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$ (b) $(G, -\vec{e}_3, 2\vec{e}_1, -\frac{1}{2}\vec{e}_2)$ (c) $(H, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

2. Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e X o ponto que divide AB na razão r. Calcule as coordenadas de X em função de r e coordenadas de A e B.

3. Determine as coordenadas do ponto Q, simétrico de $P = (x, y, z)$ em relação a $M = (x_0, y_0, z_0)$.

4*. O quadrilatelo $ABCD$ é convexo. Sabendo que $4\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, diga quais são seus diagonais e quais são seus lados.

$3^{\underline{a}}$ Equações da reta e do plano

Seja $\Sigma = (O, (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}))$ um sistema de coordenadas de E^3.

1. Sejam $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, 1)$. Escreva equações paramétricas da reta que contém o ponto $(3, 3, 3)$ e é paralela à reta BC.

2. Escreva equações na forma simétrica da reta determinada pelo ponto $(-1, -4, -2)$ e pelo ponto médio do segmento de extremidades $(1, 3, 5)$ e $(3, -3, 1)$.

3. Sejam, em relação de um sistema ortogonal, $A = (1, 4, 0)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, 2, 2)$. Verifique que esses pontos são vértices de um triângulo e escreva uma equação vetorial da reta que contém a altura relativa ao vértice B.

4. Seja Σ um sistema ortogonal. Sejam $A = (1, 2, 5)$ e $B = (-2, 3, 0)$. Escreva equações da reta AB nas formas vetorial, paramétrica e simétrica e obtenha os pontos da reta que distam $2\sqrt{19}$ de A.

5. Seja Σ um sistema ortogonal. Sejam $A = (1, 1, 1)$ e $r : X = (1, 1, 4) + \lambda(1, -1, 0)$. Obtenha os pontos de r que distam $\sqrt{11}$ de A. Em seguida, verifique se a distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{11}$ e justifique sua resposta.

6. Seja Σ um sistema ortogonal. Sejam $P = (2, 1, -1)$ e $Q = (0, -1, 0)$. Determine um ponto C da reta PQ tal que a área de triângulo ABC seja 9, nos casos: (a) $A = (0, 3, 0)$, $B = (6, 3, 3)$; (b) $A = (-2, 3, 4)$, $B = (-6, -1, 6)$; (c) $A = (-1, 1, 2)$, $B = (-5, -3, 4)$.

7. Seja Σ um sistema ortogonal. Sejam $A = (1,1,1)$, $B = (0,0,1)$ e $r : X = (1,0,0)+\lambda(1,1,1)$. Determine os pontos de r eqüidistantes de A e B.

8. Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π, tal que

   a) π contém $A = (1,2,0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1,1,0)$ e $\vec{v} = (2,3,-1)$;

   b) π contém $A = (1,1,0)$ e $B = (1,-1,-1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{u} = (2,1,0)$;

   c) π contém $A = (1,0,1)$ e $B = (0,1,-1)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $C = (1,2,1)$ e $D = (0,1,0)$;

   d) π contém os pontos $A = (1,0,2)$, $B = (-1,1,3)$ e $C = (3,-1,1)$.

9. Obtenha equações paramétricas e gerais dos planos coordenados.

10. Decomponha $\vec{u} = (1,2,4)$ como soma de um vetor paralelo à reta $r : X = (1,9,18) + \lambda(2,1,0)$ com outro paralelo ao plano

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$$

11. Obtenha uma equação geral do plano π em cada caso:

    a) π contém $A = (1,0,1)$, $B = (0,1,-1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{u} = (2,1,0)$;

    b) π contém os pontos $A = (1,0,1)$ e $B = (2,1,-1)$ e $C = (1,-1,0)$;

    c) π contém $A = (1,0,-1)$ e $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2 - z$;

    d) π contém $A = (1,-1,1)$ e $r : X = (0,2,2) + \lambda(1,1,-1)$.

12. Dadas equações paramétricas, obtenha uma equação geral ao plano:

$$(a)\ \pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases} \qquad (b)\ \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases} \qquad (c)\ \pi : \begin{cases} x = -2 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

13. Mostre que o ponto $A = (4,1,-1)$ não pertence à reta $r : X = (2,4,1) + \lambda(1,-1,2)$ e obtenha uma equação geral do plano determinado por r e P.

$4^{\underline{a}}$ Interseção de retas e planos, ortogonalidade e perpendicularidade

1. A altura e a mediana relativas ao vértice B do triângulo ABC estão contidas, respectivamente, em $r : X = (-6,0,3) + \lambda(3,2,0)$ e $s : X = (0,0,3) + \lambda(3,-2,0)$. Sendo $C = (4,-1,3)$, determine A e B.

2. Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem, obtenha o ponto de interseção:

$$(a)\, r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases} \qquad (b)\, r: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \qquad s: x-1 = -\frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

(c) $r: X = (1,1,0) + \lambda(1,2,3)$, $s: X = (2,3,3) + \lambda(3,2,1)$.

3. Obtenha os pontos de $\pi_1 : X = (1,0,0) + \lambda(2,1,1) + \mu(0,0,1)$ que pertencem a $\pi_2 :$ $x + y + z - 1 = 0$.

4. Uma partícula realiza o movimento descrito pela equação $X = (2,5,1) + t(2,-1,3)$, $t \in R$. Uma segunda partícula, também em movimento retilíneo uniforme, ocupa, no instante -2, a posição $P = (-24,14,-34)$ e, no instante 3, a posição $Q = (26,-11,41)$. Verifique se as trajetórias são concorrentes e se há perigo de colisão. Qual é a equação do movimento da segunda partícula?

5. Obtenha a interseção da reta r com o plano π:

   a) $r: X = (-1,-1,1) + \lambda(1,-1,0) \qquad \pi: x + y + z + 1 = 0$;

   b) $r: x - 3 = y - 2 = \frac{z+1}{2} \qquad \pi: x + 2y - z = 10$;

   c) $r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \qquad \pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 + \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$.

6. Obtenha uma equação vetorial da interseção de dois planos π_1 e π_2, se esta não for vazia:
   (a)$\pi_1 : X = (4,4,-2) + \lambda(2,2,-1) + \mu(0,1,4)$, $\pi_2 : X = (-4,-2,10) + \lambda(4,5,2) + \mu(6,8,5)$;
   (b)$\pi_1 : X = (1,0,0) + \lambda(0,1,1) + \mu(1,2,1)$, $\pi_2 : X = (0,0,0) + \lambda(0,3,0) + \mu(-2,-1,-1)$.

7. Seja Σ um sistema de coordenadas ortogonal. O triângulo ABC é retângulo em B e está contido em $\pi_1 : x + y + z = 1$. O cateto BC está contido em $\pi_2 : x - 2y - 2z = 0$ e a hipotenusa mede $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Sendo $A = (0,1,0)$, determine B e C.

8*. Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, sejam

$$\begin{array}{l} r: X = (1,1,2) + \lambda(0,1,1) \\ s: x + 2 = y + z = z + 1 \end{array} \qquad \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Mostre que um único ponto comum a essas três retas e calcule o volume do tetraedro determinado por elas e pelo plano $\pi : x + y - 3z = 0$.

9. Sejam $r : X = (1,0,2) + \lambda(2,1,3)$ e $s : X = (0,1,-1) + \lambda(1,m,2m)$. Estude, segundo os valores de m, a posição relativa de r e s e obtenha, quando for o caso, uma equação geral no plano determinado por elas.

10. Estude a posição relativa das retas e dos planos:

a) $r: \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, $\quad s: \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$;

b) $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z, \quad s: \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$;

c) $r: x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}, \quad s: X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1);$

d) $r: \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}, \quad \pi: X = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 0);$

e) $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, $\quad \pi: x + y = 2;$

f) $\pi_1: 2x - y + 2z - 1 = 0, \quad \pi_2: X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1);$

11. Calcule n e m para que $r: X = (m, 3, n) + \lambda(1, 1, n)$ seja paralela a $\pi: nx - ny + mz = 1$.

12. Verifique se as retas r e s são ortogonais ou perpendiculares:

a) $r: x + 3 = y = \frac{z}{3}, \quad s: \frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{-1} = -z;$

b) $r: 36x - 9y = 3y + 4z = 18, \quad s: x + y = z - y - 2 = 0.$

13. O vetor $(1, 1, m)$ é normal ao plano π, que contem a interseção dos planos $\pi_1: x - y + z + 1 = 0$ e Oyz. Determine m e obtenha uma equação geral de π.

14. Obtenha o simétrico do ponto $P = (1, 4, 2)$ em relação ao plano $\pi: x - y + z - 2 = 0$.

15. Determine os vértices B, C e D de um quadrado $ABCD$, sabendo que $A = (0, -19, 4)$, um lado está contido no plano $\pi_1: 2x - 2y + z = 15$, outro, no plano $\pi_2: 2x + y - 2z = 0$, e o plano do quadrado é perpendicular à reta interseção de π_1 e π_2.

Posição relativa, medida angular, distância

Suponhamos que o sistema de coordenadas Σ é ortonormal positiva

1. Dadas as retas $r: X = (0,1,0) + \lambda(1,0,0)$ e $s: X = (-1,2,-7) + \lambda(2,1,-3)$, obtenha uma equação vetorial da reta t, concorrente com r e s e paralela a $\vec{u} = (1,-5,-1)$.

2. Obtenha, em cada caso, uma equação vetorial da reta que contém P, é paralela ou contida no plano π e é concorrente com a reta r.

   (a) $P = (1,1,0)$, $\pi: 2x + y - z - 3 = 0$, $r: X = (1,0,0) + \lambda(-1,0,1)$;

   (b) $P = (1,0,1)$, $\pi: x - 3y - z = 1$, $r: X = (0,0,0) + \lambda(2,1,-1)$;

   (c) $P = (2,-1,2)$, $\pi: x + y + z = 0$, r interseção dos planos $\pi_1: x = z$ e $\pi_2: z = y + 2$.

3. O plano π contém $r: x - y = x + z - 1 = 0$ e determina, com os planos coordenados, um tetraedro de volume $\frac{1}{12}$. Obtenha os vértices do tetraedro e uma equação geral de π.

4. Determine o vértice B de um triângulo retângulo ABC, sabendo que $A = (1,1,1)$ e a cota de C é maior que a de A; a hipotenusa AC mede $\sqrt{3}$ e é ortogonal ao plano de equação $x + y - z - 10 = 0$; o lado AB é ortogonal as plano de equação $2x - y - z = 0$.

5. Determine o ponto P na reta $r: X = (0,2,0) + \lambda(0,1,0)$ e o ponto Q na reta $s: X = (1,2,0) + \lambda(0,0,1)$, tais que a reta PQ forme ângulos de $\frac{\pi}{4}$ com r e $\frac{\pi}{3}$ com s.

6. Determine as extremidades B e D de uma das diagonais de um losango $ABCD$ contido no plano $\pi: x - y - z = 0$, sabendo que $A = (3,0,3)$, $C = (1,2,-1)$ e que o ângulo $A\hat{B}C$ mede $\frac{2\pi}{3}$.

7. Obtenha a medida angular em radianos entre a reta r e o plano π.

   (a) $r: x = y - z = 0$, $\pi: z = 0$ $\quad (b)$ $r: X = (1,0,0) + \lambda(1,1-2)$, $\pi: x + y - z - 1 = 0$.

8. Obtenha uma equação geral do plano que contém $r: x = z + 1 = y + 2$ e forma ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com $\pi: x + 2y - 3z + 2 = 0$.

9. Determine o ponto do plano $\pi: 2x - y + z - 2 = 0$ tal que a soma de suas distâncias a $P = (2,1,0)$ e $Q = (1,-1,-1)$ seja o menor possível.

10. A diagonal BD de um quadrado está contida em $r: x - 1 = y - z = 0$. Sendo O um dos vértices, determine os outros três.

11. Descreva o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equdistam das retas $r: x - 1 = y + z = 3$, $s: 3x + y + z = x - y - z = 0$ e $t: x - y = x + z = 1 + z$.

12. Mostre que os pontos $A = (-2,0,1)$, $B = (0,0,-1)$, $C = (1,1,1)$, $D = (-2,-1,-2)$ e $E = (1,2,2)$ são vértices de uma pirâmide e calcule seu volume.

13. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta $r : x = -y = 1 - z$, equidista de $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$ e separa A e B.

14. Determine a reta r que contém o ponto $(1, 3, -1)$, é paralela ao plano $\pi : x + z = 2$ e dista 3 da reta $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$.

15. Obtenha uma equação vetorial da reta que contém a origem, dista 2 de $s : X = (0, 1, 2) + \lambda(0, 1, 0)$ e forma ângulos congruentes com $t : X = (1, 1, 2) + \lambda(1, -1, 0)$ e $r : X = (2, 3, -1) + \lambda(1, 1, 0)$.

16. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (2, 1, 1)$ e dista 1 da reta $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(1, 0, 2)$.

17. Dentre os planos que distam 2 de $\pi : x - y + z = 0$, qual é o que está mais próximo de $P = (2, 1, 1)$?