**$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios MAT 105**
**Geometria Analitica**

## $1^{\underline{a}}$ parte: Vetores, operações com vetores

1. Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é paralelo ás bases e sua medida é a metade da soma das medidas das bases.

2. Dado um hexágono regular $ABCDEF$, de centro $O$.

   a) Determine as seguintes somas:

   $$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DC}, \quad \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{CO}, \quad \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}.$$

   b) Mostre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

   c) Exprima em função de $\overrightarrow{AF}$ e $\overrightarrow{AB}$ os seguintes vetores: $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG}$.

3. Sendo $A$, $B$, $C$ vértices de um triângulo e $X$ ponto médio do lado $AB$, exprima $\overrightarrow{CX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

4. Sendo $A$, $B$, $C$ vértices de um triângulo e $X$ ponto do segmento $AB$ tal que $\overrightarrow{AX} = \frac{\overrightarrow{XB}}{3}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

5. Sendo $A$, $B$, $C$ vértices de um triângulo e $X$ ponto do segmento $AB$ tal que $\overrightarrow{AX} = \frac{\overrightarrow{AB}}{4}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ como combinação linear de $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

6. Resolver os seguintes sistemas, nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$

   a) $\begin{cases} 2\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{u} \\ \vec{x} + 4\vec{y} = \vec{u} + \vec{v} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4\vec{x} - \vec{y} = 11\vec{u} - \vec{v} \\ 5\vec{x} + \vec{y} = 16\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{0} \\ \vec{x} - 2\vec{y} = \vec{u} \\ \vec{x} - 5\vec{y} = 2\vec{u} \end{cases}$

7. Num triângulo $ABC$, sejam $M$, $N$, $P$ os pontos médios dos lados $AB$, $BC$ e $AC$ respectivamente. Mostre que $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

8. Seja $OABC$ um tetraedro, $X$ um ponto da reta $BC$ definido por $\overrightarrow{BX} = m\overrightarrow{BC}$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

9. Sendo $ABCD$ um trapézio com bases $AB$ e $DC$, suponhamos que $M$ um ponto do segmento $AD$ tal que $\overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DA}}{4}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{4}$. Mostre que

   a) $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.

   b) o segmento $MN$ é paralelo às bases do trapézio.

10. Dado um triângulo qualquer, mostre que existe outro com lados paralelos e congruentes às medianas do primeiro.

11. Seja $OABC$ um tetraedro, $X$ um ponto de encontro das medianas do triângulo $ABC$. Exprima $\overrightarrow{OX}$ em termos de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

## 2ª Dependência e independência linear dos vetores, bases

1. Considere $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não paralelos. Determine $\alpha$ e $\beta$ nos casos seguintes, sabendo que:

   a) $(2\alpha - 2\beta)\vec{u} + (\alpha + \beta - 2)\vec{v} = \vec{0}$; b) $(\alpha + \beta - 2)\vec{u} + (\alpha - \beta + 1)\vec{v} = \vec{0}$.

2. Calcule $m$ e $n$ nos casos seguintes, sabendo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não paralelos:

   a) $(m-1)\vec{u} + n\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}$;

   b) $(m^2 - 3)\vec{u} + (n+1)\vec{v} = \vec{u} - \vec{v}$;

   c) $m\vec{u} + 2\vec{v} = 3\vec{u} - 14n\vec{v}$;

   d) $(m+n)\vec{u} + (m-n)\vec{v} = 2\vec{v}$.

3. Sejam $A$, $B$ e $C$ pontos quaisquer, $A \neq B$. Prove que

   a) $X$ pertence à reta $AB$ se e somente se existem escalares $\alpha$ e $\beta$ tais que $\alpha + \beta = 1$ e $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$.

   b) $X$ pertence ao segmento $AB$ se e somente se existem escalares $\alpha$ e $\beta$ tais que $\alpha + \beta = 1$ $\alpha, \beta \geq 0$ e $\overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$.

4. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores de $V^3$.

   a) Prove que os vetores $\{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}\}$ são LD para quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

   b) Prove que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ e $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ são LI.

5. Determine $m$ e $n$ de modo que os vetores $\vec{v}$, $\vec{w}$ sejam LD, onde:

$$a)\ \vec{v} = (1, m, n+1),\ \ \vec{w} = (m, n, 2) \qquad b)\ \vec{v} = (1, m-1, m),\ \ \vec{w} = (m, n, 4).$$

6. Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores de $V^3$. Prove que

   a) se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ são LD, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são LD;
   b) se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são LI, então $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ são LI;
   c) $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ são LD se e somente se $\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\}$ são LD;

Nos exercícios abaixo, as coordenadas dos vetores são dadas em relação a uma base qualquer fixada.

7. Um vetor $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$?

8. Decida se é LD ou é LI:

   a) $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$;
   b) $\vec{u} = (0, 1, 1)$ e $\vec{v} = (0, 2, 1)$;
   c) $\vec{u} = (1, -3, 2)$ e $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 1)$;
   d) $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 3, 4)$ e $\vec{w} = (-2, -1, 0)$;
   e) $\vec{u} = (0, 0, 0)$;
   f) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (4, 5, 6, )$ e $\vec{w} = (0, 0, 0)$.

## $3^{\underline{a}}$ Bases, bases ortonormais, mudança de base

1. Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base ortonormal. Calcule $\|\vec{u}\|$ nos seguintes casos:

$$a)\ \vec{u} = (1,1,1)_E; \quad b)\ \vec{u} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}; \quad c)\ \vec{u} = 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}; \quad d)\ \vec{u} = -4\vec{e_1} + 2\vec{e_2} - \vec{e_3}.$$

2. Sejam $OABC$ um tetraedro e $M$ o ponto médio de $BC$.
   (a) Explique por que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ é uma base.
   (b) Determine as coordenadas de $\overrightarrow{AM}$ nesta base.

3. Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base, $\vec{u} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{v} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ e $\vec{w} = a\vec{e_1} + b\vec{e_2} + c\vec{e_3}$. Deduza uma condição necessária e suficiente sobre $a$, $b$, $c$ para que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ seja base.

4. Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base, $\vec{u} = (1, 2, -1)_E$, $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = m\vec{e_1} + 2m\vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{f_3} = 4\vec{e_2} + 3\vec{e_3}$.
   (a) Para que valores $m$ a tripla $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é uma base?
   (b) Nas condições do item (a), calcule $m$ para que $\vec{u} = (0, 1, 0)_F$.

5. Sejam $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ ume base, $\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{f_3} = 3\vec{e_3}$.
   (a) Mostre que $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ é base.
   (b) Calcule $m$ para que $(0, m, 1)_E$ e $(0, 1, -1)_F$ sejam LD.
   (c) Calcule $M_{EF}$ and $M_{FE}$.

6. Se $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é base, que condições deve satisfazer $m$ para que $F = (\vec{e_1} + \vec{e_2}, m\vec{e_2} - \vec{e_3}, \vec{e_1} + m\vec{e_3})$ seja base? Escreva a matriz de mudança de $E$ para $F$.

7. Sejam $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ uma base e $F = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ tais que $\vec{u} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c}$. Prove que $F$ é base e verifique se $(\vec{x}, \vec{y})$ é LD ou LI, nos casos:

$$(a)\ \vec{x} = (2, 2, 0)_F,\ \vec{y} = (-4, 0, -2)_E, \qquad (b)\ \vec{x} = (1, 0, 2)_F,\ \vec{y} = (11/15, 2/3, -4/5)_E.$$

## $4^{\underline{a}}$ Produto escalar, produto vetorial

*Seja* $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ *ortonormal positiva*

1. Sendo $ABCD$ um tetraedro regular de aresta unitária, calcule $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \rangle$.

2. Determine $x$ de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais.

   $(a)$ $\vec{u} = (x+1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x-1, -1, -2)$ $\qquad$ $(b)$ $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$.

3. São dadas as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortogonal fixada. Calcule a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   $(a)$ $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$ $\quad$ $(b)$ $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$, $\quad$ $(c)$ $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$.

4. Prove que:

   $(a)$ $4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$, $\qquad$ $(b)$ $2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

5. a). Prove que as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares se, e somente se, o paralelogramo é um losano.

   b). Prove que as diagonais de um paralelogramo têm comprimentos iguais se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.

   c). Prove que as diagonais de um losano estã contidas nas bissetrizes dos ângulos interiores.

   d). Prove que a soma dos quadrados dos comprimentos das diagonais de um paralelogrammo é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos quatro lados.

   e). Prove que a diagonal maior de um paralelogramo é maior do que cada um dos quatro lados.

6. Prove que $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ se somente se $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

7. Obtenha os vetores de norma $3\sqrt{3}$ que são ortogonais aos vetores $(2, 3, -1)$ e $(2, -4, 6)$. Quais desse vetores forma ângulo agudo com $(1, 0, 0)$?

8. Dados $\vec{v} = (1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, -1)$ e $\vec{t} = (2, 1, -1)$, obtenha $\vec{u}$ de norma $\sqrt{5}$, ortogonal a $\vec{t}$, tal que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ seja LD. Algum dos vetores encontrados forma ângulo agudo com $(-1, 0, 0)$.

9. A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é $\frac{\pi}{3}$ e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule a norma de $\vec{u} \times \vec{v}$.

10. Calcule a área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.

11. Ache $\vec{x}$ tal que $\langle \vec{x}, 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 4\vec{e_3} \rangle = 9$ e $\vec{x} \times (-\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}) = -2\vec{e_1} + 2\vec{e_3}$.

12. Prove que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$.

13. $^*$ Prove que $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$

14. Prove que se $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

15. $^*$ Prove que a altura do tetraedro $ABCD$ relativa á base $ABC$

$$h = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}.$$

16. Sabe-se que o vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{e_1} + \vec{e_2}$ e a $-\vec{e_1} + \vec{e_3}$, tem norma $\sqrt{3}$ e sendo $\theta$ ânguo entre $\vec{u}$ end $\vec{e_2}$, tem-se $\cos\theta > 0$, determine $\vec{u}$.

17. Em cada caso, ou mostre que a afirmação é verdadeira ou dê um exemplo mostrando que ela é falsa.

    (a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

    (b) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} \Rightarrow \vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos.

    (c) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$.

18. Dado $\vec{b} = (1, 2, 1)$, determine $\vec{a}$ tal que $\vec{a}$ é ortogonal ao vetor $\vec{e_3}$ e $\vec{a} \times \vec{b} = (1, -1, 1)$.

19. Prove que $\langle \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$.