

2ª Sistemas de coordenadas

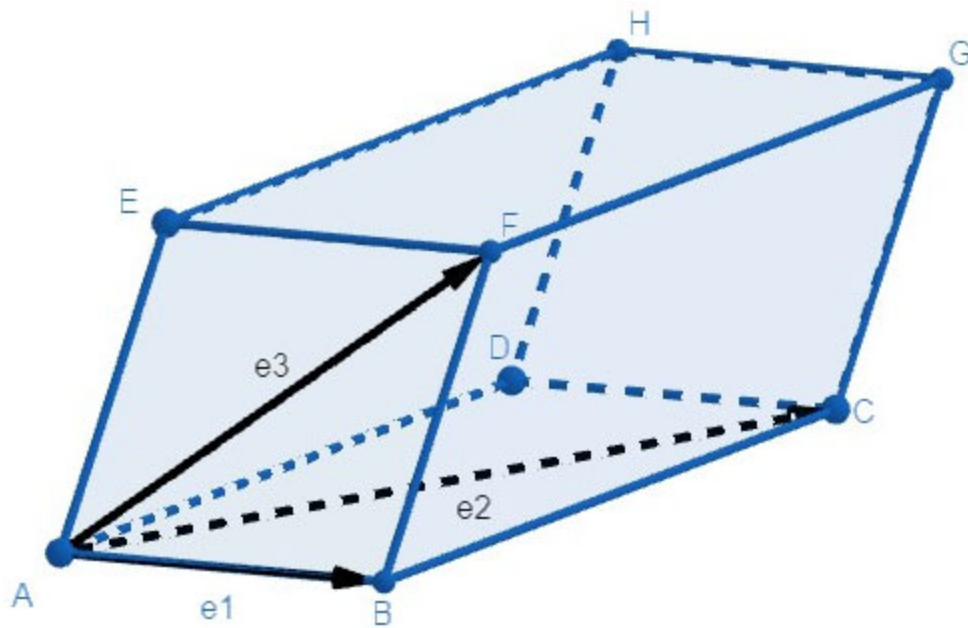
Caderno: Lista2GA

Criada em: 06/06/2020 16:31

Atualizada... 12/06/2020 15:10

Autor: Oscar Armando Hernández Morales

1. Seja $ABCDEFGH$ é um paralelepípedo. Sejam $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AF}$. Determine as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H nos seguintes sistemas de coordenadas
 (a) $(A, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$ (b) $(G, -\vec{e}_3, 2\vec{e}_1, -\frac{1}{2}\vec{e}_2)$ (c) $(H, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.



a) $\Sigma = (A, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$.

$$A = (0, 0, 0)_{\Sigma}$$

$$B = (0, 0, 1)_{\Sigma}$$

$$C = (1, 0, 0)_{\Sigma}$$

$$F = (0, 1, 0)_{\Sigma}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{e}_2 - \vec{e}_1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow D = (1, 0, -1)_{\Sigma}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \vec{e}_3 - \vec{e}_1$$

$$\Rightarrow E = (0, 1, -1)_{\Sigma}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_1$$

$$\Rightarrow G = (1, 1, -1)_{\Sigma}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_1 - \vec{e}_1 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - 2\vec{e}_1$$

$$\Rightarrow H = (1, 1, -2)_{\Sigma}$$

b) $Z' = (G, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = (G, -\vec{e}_3, 2\vec{e}_1, -\frac{1}{2}\vec{e}_2)$
 $\vec{f}_1 = -\vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}_3 = -\vec{f}_1$
 $\vec{f}_2 = 2\vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{f}_2$
 $\vec{f}_3 = -\frac{1}{2}\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_2 = -2\vec{f}_3$

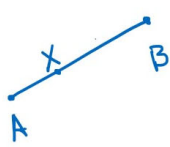
 $G = (0, 0, 0)_{Z'}$
 $\vec{AG} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{GA} = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = -\vec{e}_3 + \frac{1}{2}(2\vec{e}_1) + 2(-\frac{1}{2}\vec{e}_2) = \vec{f}_1 + \frac{1}{2}\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3$
 $\Rightarrow A = (1, \frac{1}{2}, 2)_{Z'}$
 $\vec{GB} = \vec{GA} + \vec{AB} = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + 2\vec{f}_3$
 $\Rightarrow B = (1, 1, 2)_{Z'}$
 $\vec{GC} = \vec{GA} + \vec{AC} = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_2 = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1 = \vec{f}_1 + \frac{1}{2}\vec{f}_2$
 $\Rightarrow C = (1, \frac{1}{2}, 0)_{Z'}$
 $\vec{GD} = \vec{GA} + \vec{AD} = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 = \vec{f}_1$
 $\Rightarrow D = (1, 0, 0)_{Z'}$
 $\vec{GE} = \vec{GA} + \vec{AE} = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \vec{e}_1 = -\vec{e}_2 = 2\vec{f}_3$
 $\Rightarrow E = (0, 0, 2)$
 $\vec{GF} = \vec{GA} + \vec{AF} = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{f}_2 + 2\vec{f}_3$
 $\Rightarrow F = (0, \frac{1}{2}, 2)_{Z'}$
 $\vec{GH} = \vec{GA} + \vec{AH} = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 = -\vec{e}_1 = -\frac{1}{2}\vec{f}_2$
 $\Rightarrow H = (0, -\frac{1}{2}, 0)$

c) $Z'' = (H, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$H = (0, 0, 0)_{Z''}$

$\vec{AH} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - 2\vec{e}_1 \Rightarrow \vec{HA} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \Rightarrow A = (2, -1, -1)_{Z''}$
 $\vec{AB} = \vec{HA} + \vec{AB} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_1 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \Rightarrow B = (3, -1, -1)_{Z''}$
 $\vec{AC} = \vec{HA} + \vec{AC} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \Rightarrow C = (2, 0, -1)_{Z''}$
 $\vec{AD} = \vec{HA} + \vec{AD} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_2 - \vec{e}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \Rightarrow D = (1, 0, -1)_{Z''}$
 $\vec{AE} = \vec{HA} + \vec{AE} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_3 - \vec{e}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \Rightarrow E = (1, -1, 0)_{Z''}$
 $\vec{AF} = \vec{HA} + \vec{AF} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_3 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \Rightarrow F = (2, -1, 0)_{Z''}$

2. Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e X o ponto que divide AB na razão r . Calcule as coordenadas de X em função de r e coordenadas de A e B .



$$\frac{\|\vec{XB}\|}{\|\vec{AX}\|} = r \Leftrightarrow \|\vec{XB}\| = r \|\vec{AX}\|$$

$$r \geq 0 \Leftrightarrow \|\vec{AB}\| = \|\vec{AX}\| + \|\vec{XB}\|$$

$$= \|\vec{AX}\| + r \|\vec{AX}\|$$

$$= (1+r) \|\vec{AX}\|$$

$$X = A + t\vec{AB}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \vec{AX} = t\vec{AB}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\vec{AX}\| = t \|\vec{AB}\|$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{1+r}$$

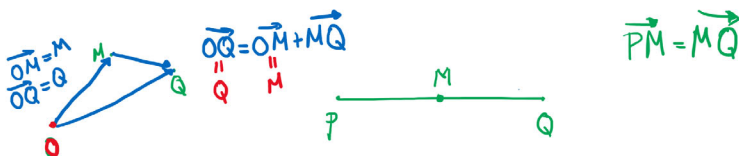
Seja $X = (x_0, y_0, z_0)$. Então,

$$x_0 = x_1 + t(x_2 - x_1) = (1-t)x_1 + tx_2 = \left(\frac{r}{r+1}\right)x_1 + \left(\frac{1}{r+1}\right)x_2$$

$$y_0 = y_1 + t(y_2 - y_1) = (1-t)y_1 + ty_2 = \left(\frac{r}{r+1}\right)y_1 + \left(\frac{1}{r+1}\right)y_2$$

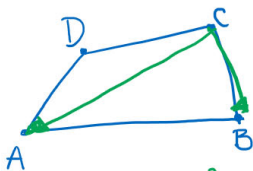
$$z_0 = z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t)z_1 + tz_2 = \left(\frac{r}{r+1}\right)z_1 + \left(\frac{1}{r+1}\right)z_2$$

3. Determine as coordenadas do ponto Q , simétrico de $P = (x, y, z)$ em relação a $M = (x_0, y_0, z_0)$.



$$\underline{Q = M + \vec{MQ} = M + \vec{PM} = (x_0, y_0, z_0) + (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) = (2x_0 - x, 2y_0 - y, 2z_0 - z)}$$

- 4*. O quadrilátero $ABCD$ é convexo. Sabendo que $4\vec{CD} = -3\vec{CA} + \vec{CB}$, diga quais são seus diagonais e quais são seus lados.



$$\text{Base} = \{\vec{CA}, \vec{CB}\}$$

$$\vec{CB} = -\frac{3}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB}$$

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = -\vec{CA} + \vec{CB}$$

$$\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD} = -\vec{CA} - \frac{3}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB} = -\frac{7}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB}$$

$$\vec{CB} = 0\vec{CA} + 1\vec{CB}$$

$$\vec{AC} = -\vec{CA} = -\vec{CA} + 0\vec{CB}$$

$$\vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = -\vec{CB} - \frac{3}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB} = -\frac{3}{4}\vec{CA} - \frac{3}{4}\vec{CB}$$

3ª Equações da reta e do plano

Caderno: Lista2GA

Criada em: 06/06/2020 16:46

Atualizada... 05/07/2020 15:55

Autor: Oscar Armando Hernández Morales

Seja $\Sigma = (O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ um sistema de coordenadas de E^3 .

1. Sejam $B = (1, 1, 0)$ e $C = (-1, 0, 1)$. Escreva equações paramétricas da reta que contém o ponto $(3, 3, 3)$ e é paralela à reta BC .

Seja $P = (3, 3, 3)$. Como $\vec{BC} = (-2, -1, 1)$, então,

$$\begin{aligned} X &= P + t\vec{BC}, t \in \mathbb{R} \\ &= (3, 3, 3) + t(-2, -1, 1) = (3 - 2t, 3 - t, 3 + t) \end{aligned}$$
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = 3 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

2. Escreva equações na forma simétrica da reta determinada pelo ponto $(-1, -4, -2)$ e pelo ponto médio do segmento de extremidades $(1, 3, 5)$ e $(3, -3, 1)$.

Ponto meio = $(\frac{1+3}{2}, \frac{3-3}{2}, \frac{5+1}{2}) = (\frac{4}{2}, 0, \frac{6}{2}) = (2, 0, 3) = P$

$A = (-1, -4, -2) \Rightarrow \vec{AP} = (3, 4, 5) \Rightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y-0}{4} = \frac{z-3}{5}$

3. Sejam, em relação de um sistema ortogonal, $A = (1, 4, 0)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, 2, 2)$. Verifique que esses pontos são vértices de um triângulo e escreva uma equação vetorial da reta que contém a altura relativa ao vértice B .

$\vec{AB} = (1, -3, -1)$ $\vec{BC} = (-1, 1, 3)$ $\vec{CA} = (0, 2, -2)$

$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = (0, 0, 0) \Rightarrow A, B, C$ formam um triângulo.

Seja P o ponto sobre a reta AC e sobre a reta que contém a altura relativa ao vértice B .

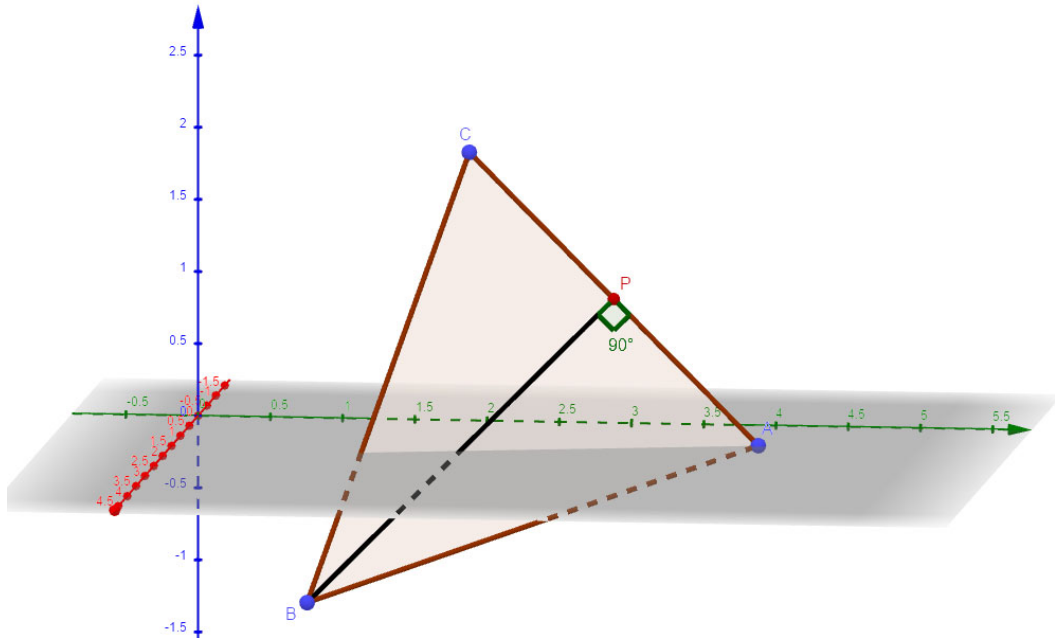
$P = A + t\vec{AC} = (1, 4, 0) + t(0, -2, 2) = (1, 4 - 2t, 2t)$

$\langle \vec{BP}, \vec{AC} \rangle = \langle (-1, 3 - 2t, 2t + 1), (0, -2, 2) \rangle = 0 - 6 + 4t + 4t + 2 = 8t - 4 = 0$

$\uparrow$ sistema ortogonal $\uparrow$ Vetores ortogonais

Como $t = \frac{1}{2} \Rightarrow P = (1, 3, 1)$

$X = P + t\vec{PB} = (1, 3, 1) + t(1, -2, -2); t \in \mathbb{R}$



4. Seja Σ um sistema ortogonal. Sejam $A = (1, 2, 5)$ e $B = (-2, 3, 0)$. Escreva equações da reta AB nas formas vetorial, paramétrica e simétrica e obtenha os pontos da reta que distam $2\sqrt{19}$ de A .

$$\vec{AB} = (-3, 1, -5) \Rightarrow X = A + t\vec{AB} = (1, 2, 5) + t(-3, 1, -5) = (1-3t, 2+t, 5-5t)$$

$$X = (x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} x = 1-3t \\ y = 2+t \\ z = 5-5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-5}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{AX}\| &= 2\sqrt{19} \Leftrightarrow \|\vec{AX}\|^2 = 76 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 76 \\ &\Leftrightarrow (-3t)^2 + t^2 + (-5t)^2 = 76 \\ &\Leftrightarrow 9t^2 + t^2 + 25t^2 = 76 \\ &\Leftrightarrow t^2 = \frac{76}{35} \Rightarrow t = \pm \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{35}} \end{aligned}$$

5. Seja Σ um sistema ortogonal. Sejam $A = (1, 1, 1)$ e $r: X = (1, 1, 4) + \lambda(1, -1, 0)$. Obtenha os pontos de r que distam $\sqrt{11}$ de A . Em seguida, verifique se a distância do ponto A à reta r é maior, menor ou igual a $\sqrt{11}$ e justifique sua resposta.

$$\|\vec{AX}\| = \sqrt{11} \Leftrightarrow \|\vec{AX}\|^2 = 11 \Leftrightarrow (\lambda)^2 + (-\lambda)^2 + (3)^2 = 11 \Leftrightarrow 2\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow X = (1, 1, 4) + (1, -1, 0) = (2, 0, 4)$$

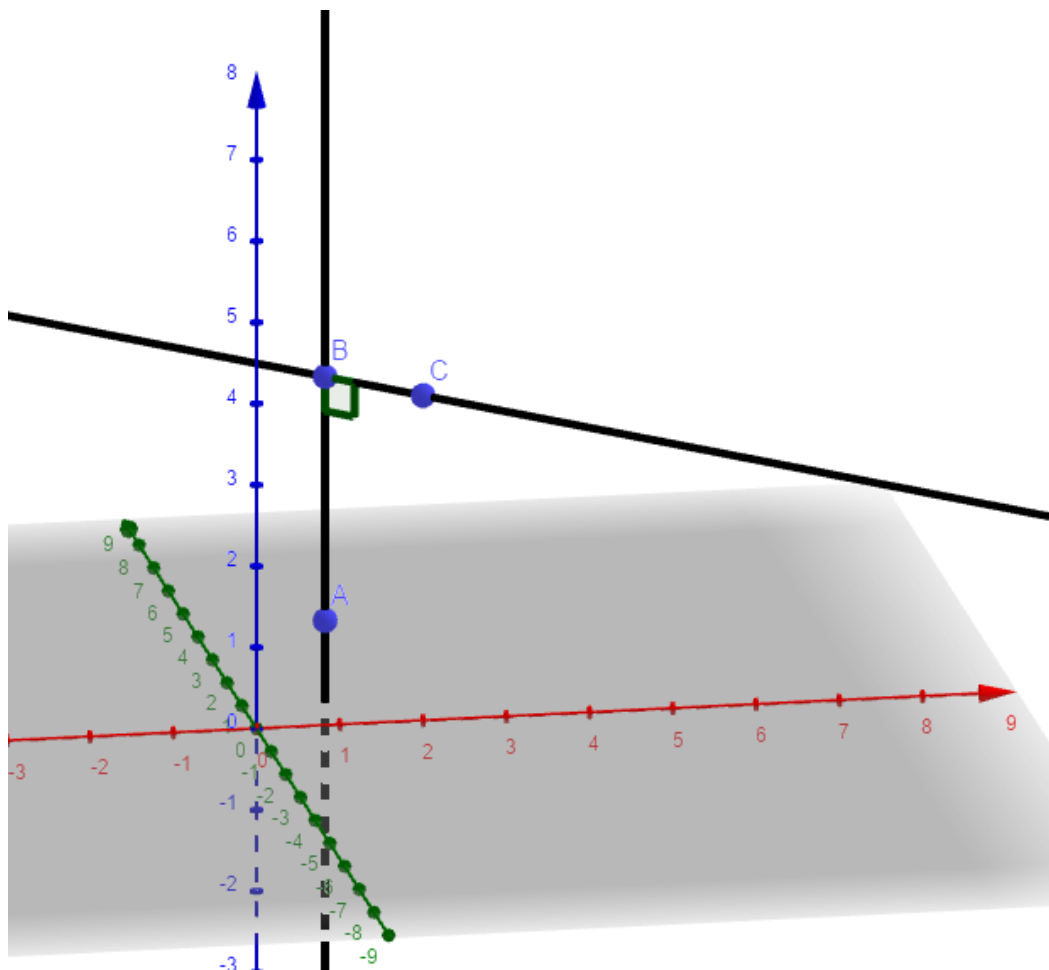
$$\lambda = -1 \Rightarrow X = (1, 1, 4) + (-1, 1, 0) = (0, 2, 4)$$

$$\text{Considere } B = (1, 1, 4) \Rightarrow \vec{AB} = (0, 0, 3) \Rightarrow \langle (0, 0, 3), (1, -1, 0) \rangle = 0$$

Portanto, $\vec{AB}$ e o vetor diretor da reta são ortogonais.

$$\text{Assim, } d(A, r) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3 < \sqrt{11}$$

Portanto a distância de A à reta r é menor que $\sqrt{11}$.



6. Seja Σ um sistema ortogonal. Sejam $P = (2, 1, -1)$ e $Q = (0, -1, 0)$. Determine um ponto C da reta PQ tal que a área de triângulo ABC seja 9, nos casos: (a) $A = (0, 3, 0)$, $B = (6, 3, 3)$; (b) $A = (-2, 3, 4)$, $B = (-6, -1, 6)$; (c) $A = (-1, 1, 2)$, $B = (-5, -3, 4)$.

$$\overrightarrow{PQ} = (-2, -2, 1) \Rightarrow C = Q + t\overrightarrow{QP} = (0, -1, 0) + t(2, 2, -1) \\ = (2t, -1+2t, -t)$$

Área do triângulo ABC é $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$

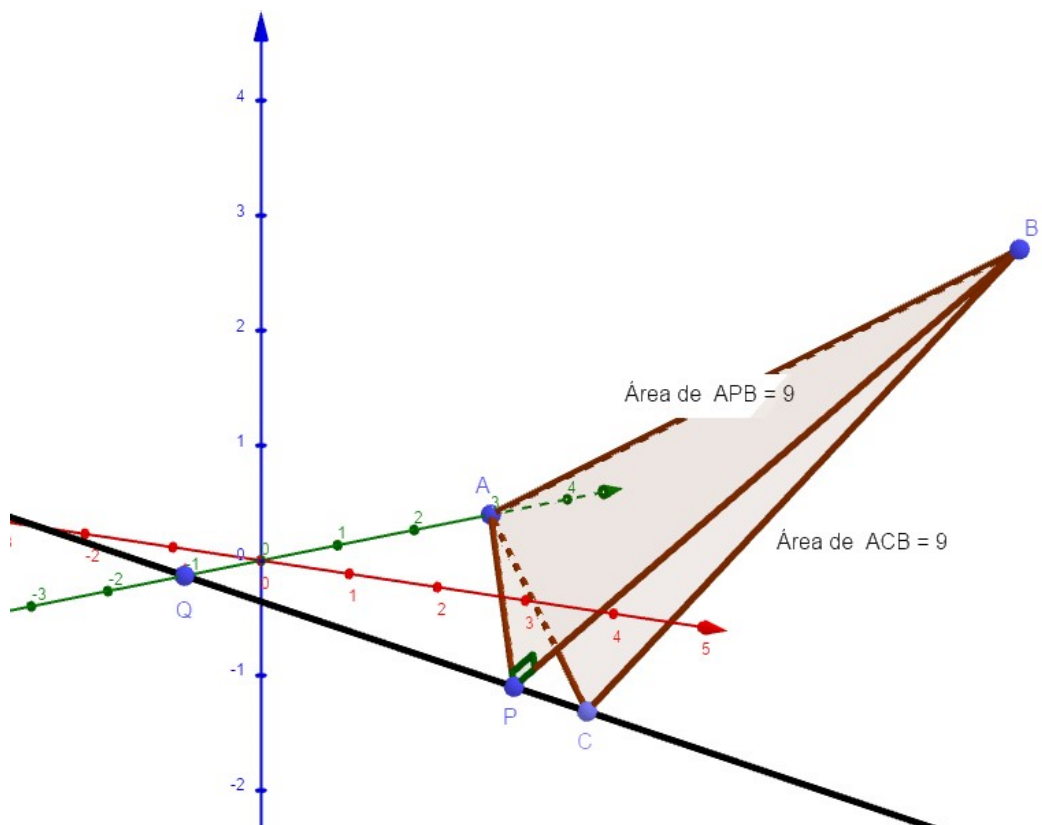
$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (6, 0, 3) \times (2t, -4+2t, -t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 0 & 3 \\ 2t & -4+2t & -t \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(12-6t) - \vec{j}(-6t-6t) + \vec{k}(-24+12t) \\ = (12-6t, -12t, -24+12t) = 6(2-t, -2t, -4+2t)$$

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 6\sqrt{(2-t)^2 + (-2t)^2 + (-4+2t)^2} = 6\sqrt{9t^2 - 20t + 20}$$

$$\text{Assim } 3\sqrt{9t^2 - 20t + 20} = 9 \Rightarrow 9t^2 - 20t + 20 = 9 \Rightarrow 9t^2 - 20t + 11 = 0 \\ (\Rightarrow (t-1)(9t-11) = 0) \\ (\Rightarrow t=1 \text{ ou } t=\frac{11}{9})$$

$$\text{Portanto, } C = (2, 1, -1) = P \text{ ou } C = \left(\frac{22}{9}, \frac{13}{9}, -\frac{11}{9}\right)$$



(b) $C = (2t, 2t-1, -t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$
 $\vec{AB} = (-4, -4, 2)$ e $\vec{AC} = (2t+2, 2t-4, -t-4)$

Área do triângulo ABC é $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = 24\vec{i} - 12\vec{j} + 24\vec{k} = (24, -12, 24)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Assim, $\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 36$

Logo, a área do triângulo ABC = 18, independente do ponto C.

Portanto, não existe o ponto C.

(c) $C = (2t, 2t-1, -t)$, $t \in \mathbb{R}$

$\vec{AB} = (-4, -4, 2)$

$\vec{AC} = (2t+1, 2t-2, -t-2)$

Logo, $\vec{AB} \times \vec{AC} = 12\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k} = (12, -6, 12)$

Assim $\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = 18$

Portanto, a área do triângulo ABC é 9, para todo C.

7. Seja Σ um sistema ortogonal. Sejam $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, 0, 1)$ e $r: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1)$. Determine os pontos de r equidistantes de A e B.

$$\|\vec{AX}\| = \|\vec{BX}\| \Leftrightarrow \|\vec{AX}\|^2 = \|\vec{BX}\|^2 \Leftrightarrow \|(\lambda, \lambda-1, \lambda-1)\|^2 = \|(1+\lambda, \lambda, \lambda-1)\|^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\lambda^2} + (\lambda-1)^2 + (\lambda-1)^2 = (1+\lambda)^2 + \cancel{\lambda^2} + (\lambda-1)^2 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2 - (\lambda-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0$$

Portanto, $X = (1, 0, 0)$

8. Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π , tal que

- a) π contém $A = (1, 2, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 3, -1)$;
 b) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, 1, 0)$;
 c) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$;

a) $X = (1, 2, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(2, 3, -1) ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (Vetorial)

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + \lambda + 3\mu \\ z = -\mu \end{cases} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (Paramétrica).}$$

b) $\vec{AB} = (0, -2, -1)$

$$X = (1, 1, 0) + \lambda(0, -2, -1) + \mu(2, 1, 0) ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$x = 1 + 2\mu$$

$$y = 1 - 2\lambda + \mu ; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$z = -\lambda$$

9. Obtenha equações paramétricas e gerais dos planos coordenados.

Plano "XY" $z=0$ (Geral)

"Plano XZ" ?

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ (Paramétrica)}$$

"Plano YZ" ?

10. Decomponha $\vec{u} = (1, 2, 4)$ como soma de um vetor paralelo à reta $r : X = (1, 9, 18) + \lambda(2, 1, 0)$ com outro paralelo ao plano

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda = 1 + 1\lambda + 0\mu \\ y = 1 + \mu = 1 + 0\lambda + 1\mu \\ z = \lambda - \mu = 0 + 1\lambda - 1\mu \end{cases}$$

Vetores paralelos ao plano $(1, 0, 1)$, $(0, 1, -1)$

Vetor. paralelo à reta $(2, 1, 0)$

$$\begin{aligned} (1, 2, 4) &= \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(0, 1, -1) \\ &= (2\alpha + \beta, \alpha + \gamma, \beta - \gamma) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha + \gamma \\ 4 = \beta - \gamma \end{cases} \Rightarrow 6 = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 6 - \alpha \Rightarrow 1 = 2\alpha + 6 - \alpha = \alpha + 6 \Rightarrow \alpha = -5$$

$$\Rightarrow \beta = 11, \gamma = 7$$

11. Obtenha uma equação geral do plano π em cada caso:

- a) π contém $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, 1, 0)$;
- b) π contém os pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$;
- c) π contém $A = (1, 0, -1)$ e $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = 2 - z$;
- d) π contém $A = (1, -1, 1)$ e $r: X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.

a) $\vec{v} = \vec{AB} = (-1, 1, -2)$ é um vetor diretor do plano

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(-2) - y(-4) + (z-1)(3) \\ &= -2x + 4y + 3z + 2 - 3 \\ &= -2x + 4y + 3z - 1 \\ \pi: 2x - 4y - 3z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

b) ?

c) Um ponto da reta "r" é: $(1, 0, -2) = B$
 O vetor diretor da reta "r" é: $(2, 3, -1)$

$\vec{AB} = (0, 0, -1)$ é vetor diretor do plano

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} x-1 & y \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3x-3-2y$$

$$3x-2y-3=0$$

d) ?

12. Dadas equações paramétricas, obtenha uma equação geral ao plano:

$$(a) \pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases} \quad (b) \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases} \quad (c) \pi : \begin{cases} x = -2 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

(a)
$$\begin{aligned} x &= 1 - 1\lambda - 1\mu \\ y &= 0 + 2\lambda + 1\mu \\ z &= 3 + 0\lambda - 1\mu \end{aligned}$$

Ponto: $(1, 0, 3)$
 Vetores diretores: $(-1, 2, 0)$ e $(-1, 1, -1)$

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x - y + z - 1$$

Equação geral do plano:
 $2x + y - z + 1 = 0$

(b)? (c)?

13. Mostre que o ponto $A = (4, 1, -1)$ não pertence à reta $r : X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$ e obtenha uma equação geral do plano determinado por r e A .

Suponha que A pertence à reta, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(4, 1, -1) = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2) = (2+\lambda, 4-\lambda, 1+2\lambda)$

logo $\begin{matrix} 4 = 2 + \lambda \\ 1 = 4 - \lambda \\ -1 = 1 + 2\lambda \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \\ \lambda = -1 \end{matrix}$ absurdo! Portanto, A não pertence à reta.

Se $B = (2, 4, 1)$, então $\vec{AB} = (-2, 3, 2)$ é vetor diretor do plano.

$$0 = \begin{vmatrix} x-4 & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -8x - 6y + z + 39$$

Equação geral: $8x + 6y - z - 39 = 0$

4ª Interseção de retas e planos, ortogonalidade e perpendicularidade

Caderno: Lista2GA

Criada em: 06/06/2020 16:54

Atualizada... 08/07/2020 18:18

Autor: Oscar Armando Hernández Morales

1. A altura e a mediana relativas ao vértice B do triângulo ABC estão contidas, respectivamente, em $r : X = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0)$ e $s : X = (0, 0, 3) + \lambda(3, -2, 0)$. Sendo $C = (4, -1, 3)$, determine A e B .

Por hipótese B é a interseção das retas "r" e "s", logo

$$B = (-6, 0, 3) + \lambda(3, 2, 0) = (3\lambda - 6, 2\lambda, 3), \text{ para algum } \lambda$$

$$B = (0, 0, 3) + \lambda'(3, -2, 0) = (3\lambda', -2\lambda', 3) \quad , \quad " \quad " \quad " \quad \lambda' "$$

Assim, $\begin{cases} 3\lambda - 6 = 3\lambda' \\ 2\lambda = -2\lambda' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda' = -1 \end{cases} \Rightarrow B = (-3, 2, 3)$

Seja $A = (x, y, z) \in M$ o ponto meio de AC

$\sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}_n, M = \left(\frac{x+4}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+3}{2} \right)$

Como M pertence à reta S , então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{x+4}{2} = 3\lambda \quad \frac{y-1}{2} = -2\lambda \quad \frac{z+3}{2} = 3$$

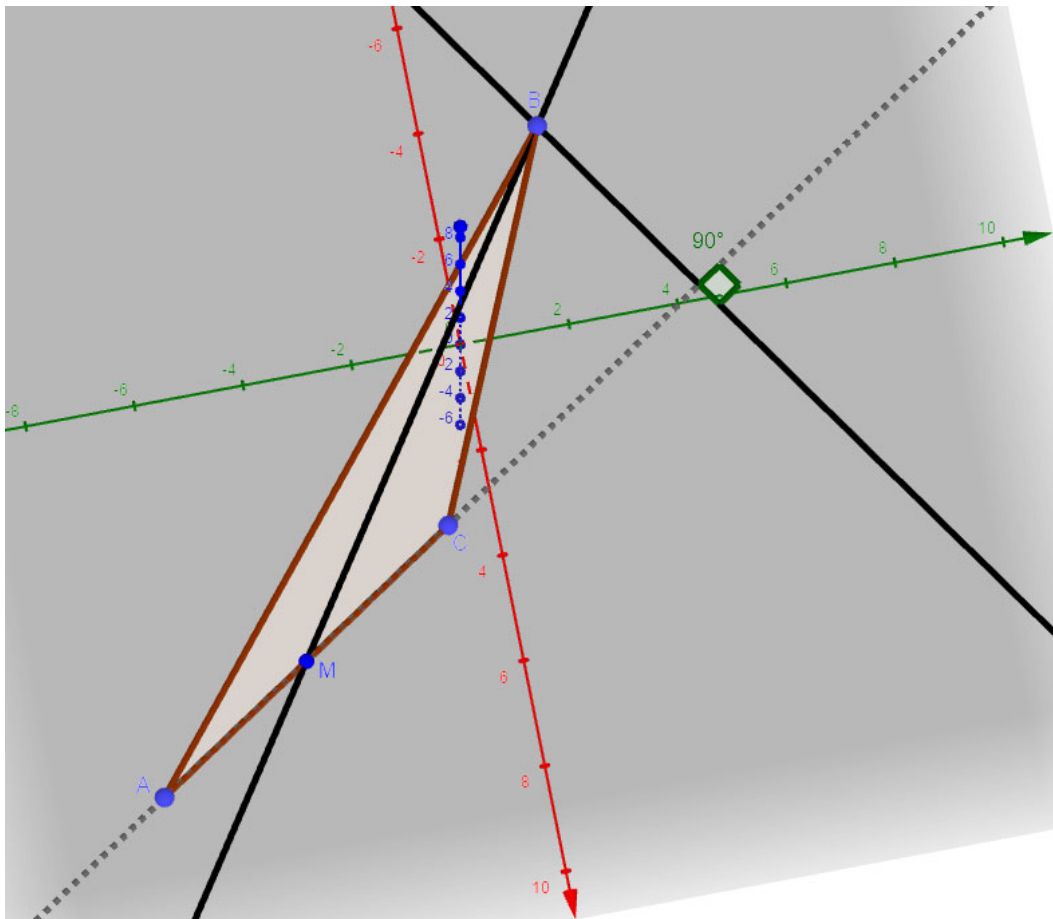
$$\Rightarrow x = 6\lambda - 4 \quad y = -4\lambda + 1 \quad z = 3$$

$$\Rightarrow \vec{AC} = (4-x, -1-y, 3-z) = (8-6\lambda, 4\lambda-2, 0)$$

$\Rightarrow \vec{AC} = (4-x, -1-y, 3-z) = (8-6\lambda, 4\lambda-2, 0)$
Mas este vetor é ortogonal com o vetor $(3, 2, 0)$ já que a reta "r" contém a altura relativa ao vértice B. Assim

$$0 = (8-6\lambda)(3) + (4\lambda-2)(2) + (0)(0) = 24 - 18\lambda + 8\lambda - 4 = 20 - 10\lambda \Rightarrow \lambda = 2$$

Portanto, $A = (8, -7, 3)$



2. Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem, obtenha o ponto de interseção:

$$(a) \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = -2 + 6\lambda \end{cases} \quad (b) \quad r : \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases} \quad s : x - 1 = -\frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

$$(c) \quad r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 2, 3), \quad s : X = (2, 3, 3) + \lambda(3, 2, 1).$$

(a) O vetor diretor de "r" é $(2, 1, 3)$
 " " " " "s" " $(4, 2, 6)$

Como estes vetores são paralelos as retas não são concorrentes.

$$b) \quad 1 - 2\lambda = -2 - \frac{1}{2}\lambda = -\frac{3}{2}\lambda.$$

$$\text{Então } -2 - \frac{1}{2}\lambda = -\frac{3}{2}\lambda$$

$$-2 = -\lambda$$

$$\lambda = 2$$

Portanto, $x = -2$, $y = 6$, $z = -6$
 é o ponto de interseção.

$$c) \quad X = (1+\lambda, 1+2\lambda, 3\lambda) \quad X = (2+3\lambda', 3+2\lambda', 3+\lambda')$$

$$\text{Então, } \begin{cases} 1+\lambda = 2+3\lambda' \rightarrow 3\lambda' = \lambda - 1 \\ 1+2\lambda = 3+2\lambda' \\ 3\lambda = 3+\lambda' \end{cases} \rightarrow 3\lambda' + 6 = 1 + 5\lambda \Leftrightarrow 3\lambda' = 5\lambda - 5$$

$$\text{Logo } 5\lambda - 5 = \lambda - 1 \Leftrightarrow 4\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \lambda' = 0.$$

Portanto, $X = (2, 3, 3)$ é o ponto de interseção.

3. Obtenha os pontos de $\pi_1 : X = (1, 0, 0) + \lambda(2, 1, 1) + \mu(0, 0, 1)$ que pertencem a $\pi_2 : x + y + z - 1 = 0$.

Os pontos de π_1 são $X = (1+2\lambda, \lambda, \lambda+\mu)$ e estes pertencem a π_2 se e só se, $1+2\lambda+\lambda+\lambda+\mu-1=0$, isto é $\mu = -4\lambda$

Portanto, $X = (1+2\lambda, \lambda, -3\lambda) = (1, 0, 0) + \lambda(2, 1, -3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Uma partícula realiza o movimento descrito pela equação $X = (2, 5, 1) + t(2, -1, 3)$, $t \in \mathbb{R}$. Uma segunda partícula, também em movimento retilíneo uniforme, ocupa, no instante -2 , a posição $P = (-24, 14, -34)$ e, no instante 3 , a posição $Q = (26, -11, 41)$. Verifique se as trajetórias são concorrentes e se há perigo de colisão. Qual é a equação do movimento da segunda partícula?

$$\overrightarrow{PQ} = (50, -25, 75) = 25(2, -1, 3) \Rightarrow \text{As retas não são concorrentes.}$$

Suponha que P pertence a reta $X = (2+2t, 5-t, 1+3t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$\text{Então, } 14 = 5 - t \Rightarrow t = -9 \Rightarrow 2 + 2t = 2 + 2(-9) = -16 \neq -24 \text{ Contradição!}$$

Logo não há perigo de colisão.

Seja A o ponto da partícula no instante $t=0$ e $\vec{v}$ o vetor diretor da trajetória da segunda partícula. Então,

$$\begin{cases} P = A - 2\vec{v} \\ Q = A + 3\vec{v} \end{cases} \Rightarrow (50, -25, 75) = \overrightarrow{PQ} = 5\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = (10, -5, 15)$$

$$\text{Assim } (-24, 14, -34) = (x, y, z) - 2(10, -5, 15) = (x-20, y+10, z-30)$$

$$\text{Por conseguinte, } A = (x, y, z) = (-4, 4, -4)$$

Portanto, a equação

$$X = (-4, 4, -4) + \lambda(10, -5, 15), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. Obtenha a interseção da reta r com o plano π :

a) $r: X = (-1, -1, 1) + \lambda(1, -1, 0)$ $\pi: x + y + z + 1 = 0$;

b) $r: x - 3 = y - 2 = \frac{z+1}{2}$ $\pi: x + 2y - z = 10$;

c) $r: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$ $\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 + \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases}$.

(a) Os pontos da reta "r" são da forma

$$X = (-1 + \lambda, -1 - \lambda, 1)$$

Estes pontos pertencem ao plano se e só se

$$-1 + \lambda + (-1 - \lambda) + 1 = 0 \quad (\text{Para todo } \lambda \in \mathbb{R})$$

Portanto, a reta r está contida no plano π .

(b) A equação paramétrica da reta é

$$x = 3 + t$$

$$y = 2 + t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$z = 2t - 1$$

$$\text{Assim, } 10 = 3 + t + 2(2 + t) - (2t - 1) = 3 + t + 4 + 2t - 2t + 1 = 8 + t$$

$$\text{Logo } t = 2$$

Portanto, a interseção da reta e o plano é o ponto $(5, 4, 3)$.

(c) ?

6. Obtenha uma equação vetorial da interseção de dois planos π_1 e π_2 , se esta não for vazia:

(a) $\pi_1: X = (4, 4, -2) + \lambda(2, 2, -1) + \mu(0, 1, 4)$, $\pi_2: X = (-4, -2, 10) + \lambda(4, 5, 2) + \mu(6, 8, 5)$;

(b) $\pi_1: X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, 1)$, $\pi_2: X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 3, 0) + \mu(-2, -1, -1)$.

(a) As equações paramétricas dos planos são

$$\pi_1: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 4 + 2\lambda + \mu \\ z = -2 - \lambda + 4\mu \end{cases} \quad \pi_2: 0 = \begin{vmatrix} x+4 & y+2 & z-10 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 9x - 8y + 2z$$

Os pontos na interseção satisfazem:

$$9(4 + 2\lambda) - 8(4 + 2\lambda + \mu) + 2(-2 - \lambda + 4\mu) = 36 + 18\lambda - 32 - 16\lambda - 8\mu - 4 - 2\lambda + 8\mu = 0$$

Isto mostra que todo ponto do plano π_1 satisfaz a equação do plano π_2 . Portanto, os planos coincidem e a interseção é π_1 .

(b) ?

7. Seja Σ um sistema de coordenadas ortogonal. O triângulo ABC é retângulo em B e está contido em $\pi_1: x + y + z = 1$. O cateto BC está contido em $\pi_2: x - 2y - 2z = 0$ e a hipotenusa mede $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Sendo $A = (0, 1, 0)$, determine B e C .

Seja $C = (x, y, z)$, então $\|\vec{AC}\| = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \|\vec{AC}\|^2 = \frac{8}{3}$

Logo $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{8}{3}$

Ademais, C satisfaz as equações de π_1 e π_2 , logo

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Assim, $x = 2y + 2z \Rightarrow 2y + 2z + y + z = 1 \Rightarrow 3y + 3z = 1$
 $\Rightarrow y = \frac{1-3z}{3}$

$$x = 2\left(\frac{1-3z}{3}\right) + 2z = \frac{2-6z+6z}{3} = \frac{2}{3}$$

Portanto, $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1-3z}{3} - 1\right)^2 + z^2 = \frac{8}{3}$

$$z_1 = -\frac{4}{3} \text{ e } z_2 = \frac{2}{3}$$

Logo $y_1 = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$ e $y_2 = -\frac{1}{3}$

As coordenadas do ponto C são:

$$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ ou } \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Seja $B = (x, y, z)$ então $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1-3z}{3}$, $z \in \mathbb{R}$
 pois B satisfaz as equações dos planos π_1 e π_2 .
 Por outro lado, o triângulo ABC é retângulo em B então,
 $\langle \vec{BC}, \vec{BA} \rangle = 0$, em que

$$\vec{BC} = \left(0, \frac{4+3z}{3}, -\frac{4+3z}{3}\right) = \frac{1}{3}(0, 4+3z, -4-3z) \quad e$$

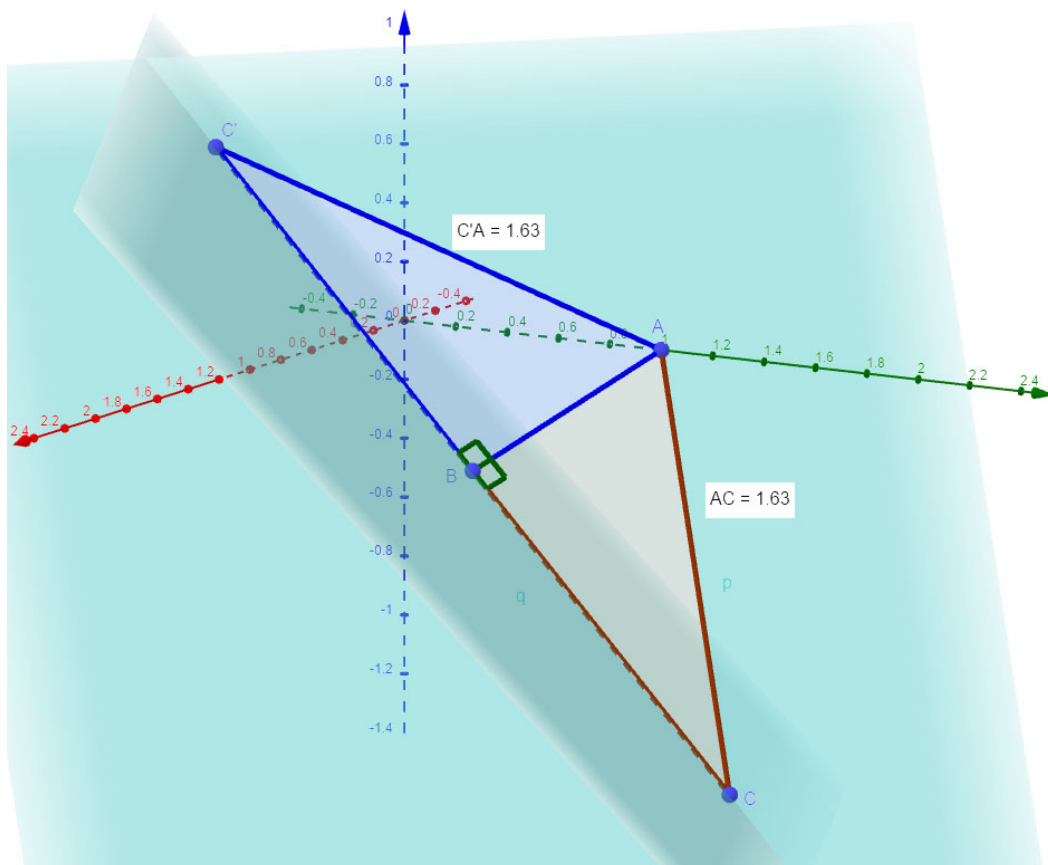
$$\vec{BA} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2+3z}{3}, -z\right) = -\frac{1}{3}(2, -2-3z, 3z)$$

Logo, $0 = (0)(2) + (4+3z)(-2-3z) + (-4-3z)(3z) = -2(9z^2 + 15z + 4)$

Então, $z = -\frac{4}{3}$ ou $z = -\frac{1}{3}$

Portanto, $B = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

Observação: $B \neq C$



8*. Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, sejam

$$\begin{aligned} r: X &= (1, 1, 2) + \lambda(0, 1, 1) \\ s: x + 2 &= y + z = z + 1 \end{aligned} \quad \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Mostre que um único ponto comum a essas três retas e calcule o volume do tetraedro determinado por elas e pelo plano $\pi: x + y - 3z = 0$.

Seja $X = (x, y, z)$ um ponto da reta "r", então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x = 1, \quad y = 1 + \lambda \quad \text{e} \quad z = 2 + \lambda$$

Suponha que X pertence a reta "s", então $1 + 2 = 2 + \lambda + 1 \Rightarrow \lambda = 0$

Logo $X = (1, 1, 2)$.

Como $1 + 2 - 3 = 0$ e $1 - 2(1) + 2 - 1 = 0$ as 3 retas são concorrentes

Interseção da reta r e o plano π .

$$A = (1, 1 + \lambda, 2 + \lambda) \Rightarrow 0 = 1 + 1 + \lambda - 3(2 + \lambda) = -4 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = -2$$

Logo $A = (1, -1, 0)$

Interseção da reta s e o plano π .

$$B = (\lambda - 2, 1, \lambda - 1) \Rightarrow 0 = \lambda - 2 + 1 - 3(\lambda - 1) = 2 - 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$$

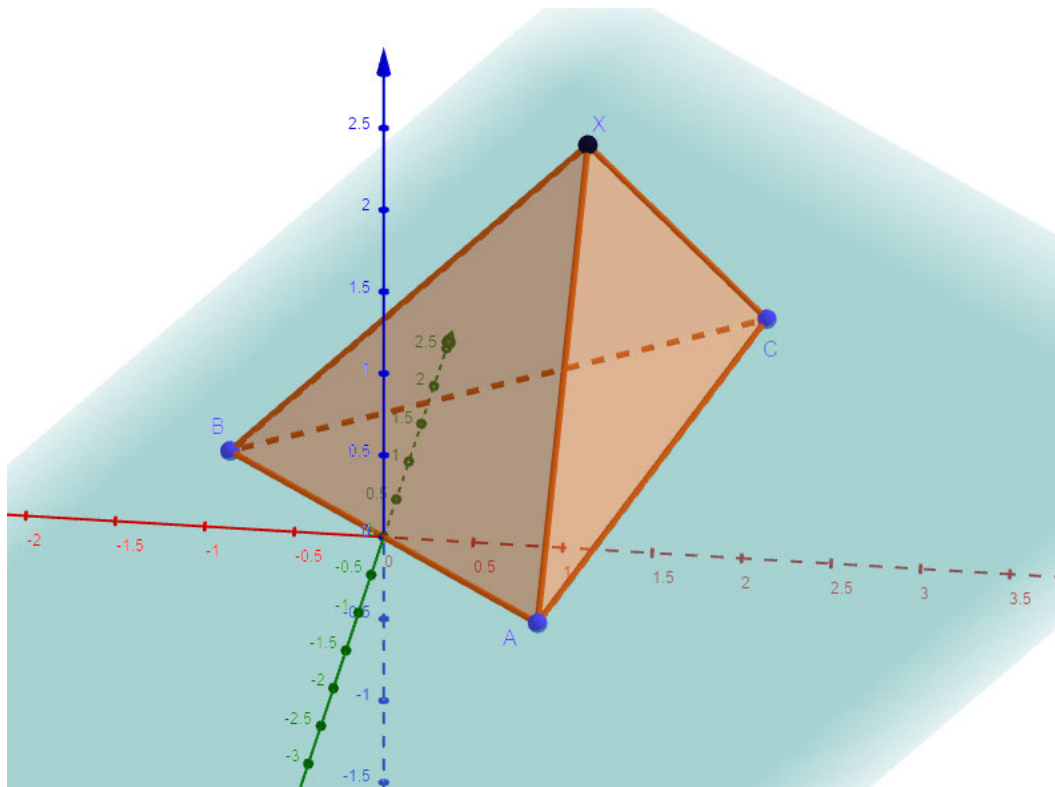
Logo $B = (-1, 1, 0)$

Interseção da terceira reta e o plano π .

$$C = (x, y, z) \text{ tq. } \begin{cases} x + z = 3 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{matrix} \Rightarrow C = (2, 1, 1)$$

Temos os vetores $\vec{XA} = (0, -2, -2)$, $\vec{XB} = (-2, 0, -2)$, $\vec{XC} = (1, 0, -1)$

$$\text{O volume do tetraedro} = \frac{1}{6} |[\vec{XA}, \vec{XB}, \vec{XC}]| = \frac{4}{3}$$



9. Sejam $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(2, 1, 3)$ e $s : X = (0, 1, -1) + \lambda(1, m, 2m)$. Estude, segundo os valores de m , a posição relativa de r e s e obtenha, quando for o caso, uma equação geral no plano determinado por elas.

O vetores diretores das retas são $(2, 1, 3)$ e $(1, m, 2m)$
 Estes vetores são L.D $\Leftrightarrow$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que
 $(1, m, 2m) = \alpha(2, 1, 3) \Leftrightarrow 1 = 2\alpha, m = \alpha, 2m = 3\alpha$
 $\Rightarrow 2 = 3$. Absurdo!

Isto prova que os vetores são L.I.

Seja $A = (1, 0, 2)$ e $B = (0, 1, -1) \Rightarrow \vec{AB} = (-1, 1, -3)$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & m & 2m \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 9m = 3(2 - 3m)$

Então, as retas são concorrentes $\Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$
 se $m \neq \frac{2}{3}$ as retas são reversas.

Caso $m = \frac{2}{3}$

$\therefore X = (0, 1, -1) + \lambda \left(1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = (0, 1, -1) + t(3, 2, 4), t \in \mathbb{R}.$
 $t = \frac{\lambda}{3}$

A equação geral do plano

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2x + y + z$$

10. Estude a posição relativa das retas e dos planos:

a) $r: \begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, $s: \begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$;

b) $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$, $s: \begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z = -2 \end{cases}$;

c) $r: x + 3 = \frac{2y-4}{4} = \frac{z-1}{3}$, $s: X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$;

d) $r: \frac{x+2}{3} = y - 1 = \frac{z+3}{3}$, $\pi: X = (1, -1, 1) + \lambda(0, 1, 2) + \mu(1, -1, 0)$;

e) $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, $\pi: x + y = 2$;

f) $\pi_1: 2x - y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2: X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1)$;

(a) As equações paramétricas das retas r e s são

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad s: \begin{cases} x = \lambda + 1 \\ y = \lambda - 1 \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Logo, os vetores diretores destas retas são:
 $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$ respectivamente

Observação: Estes vetores são L.I.

Como o ponto $(1, -1, 0)$ é um ponto comum,
 As retas r e s são concorrentes.

11. Calcule n e m para que $r: X = (m, 3, n) + \lambda(1, 1, n)$ seja paralela a $\pi: nx - ny + mz = 1$.

O vetor diretor da reta r é $(1, 1, n)$

O vetor normal ao plano π é $(n, -n, m)$

Logo a reta e o plano são paralelos, se e só se,
 os vetores $(1, 1, n)$ e $(n, -n, m)$ são ortogonais

Assim, $0 = 1 \cdot n + 1 \cdot (-n) + nm = nm$. Portanto, $m = 0$ ou $n = 0$

12. Verifique se as retas r e s são ortogonais ou perpendiculares:

a) $r: x + 3 = y = \frac{z}{3}$, $s: \frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{-1} = -z$;

b) $r: 36x - 9y = 3y + 4z = 18$, $s: x + y = z - y - 2 = 0$.

$$(a) \quad r: \frac{x-(-3)}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{3} \quad s: \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-0}{-1}$$

Os vetores diretores das retas são ortogonais, já que

$$(1, 1, 3) \cdot (2, 1, -1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

Seja $A = (-3, 0, 0)$ o ponto da reta r e

$$B = (4, 4, 0) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad s$$

Então, $\vec{AB} = (7, 4, 0)$. Logo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, as retas são perpendiculares.

(b)?

13. O vetor $(1, 1, m)$ é normal ao plano π , que contém a interseção dos planos $\pi_1: x - y + z + 1 = 0$ e Oyz . Determine m e obtenha uma equação geral de π .

A equação geral do plano Oyz é: $x = 0$. Logo, a equação geral da reta (interseção dos planos) é:

$$\begin{cases} x = 0 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

Consequentemente a equação paramétrica da reta é:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

O vetor diretor da reta é $(0, 1, 1)$, logo este vetor é ortogonal ao vetor $(1, 1, m)$, uma vez que o plano π contém a reta.

Assim, $0 = (0, 1, 1) \cdot (1, 1, m) = 0 + 1 + m$. Então, $m = -1$.

Por conseguinte a equação do plano é

$$1x + 1y + (-1)z + d = 0 \Leftrightarrow x + y - z + d = 0, \text{ em que } d \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, $(0, 0, -1)$ é um ponto da reta (interseção) e π contém a reta, logo $0 + 0 - (-1) + d = 0 \Rightarrow d = -1$.

Portanto, $x + y - z - 1 = 0$ é a equação do plano π .

14. Obtenha o simétrico do ponto $P = (1, 4, 2)$ em relação ao plano $\pi: x - y + z - 2 = 0$.

O vetor normal ao plano π é: $(1, -1, 1)$. Logo a equação da reta que contém P e tem como vetor diretor $(1, -1, 1)$ é: $X = (1, 4, 2) + \lambda(1, -1, 1) = (1+\lambda, 4-\lambda, 2+\lambda)$

Assim X pertence ao plano π se e só se,

$$0 = 1 + \lambda - (4 - \lambda) + 2 + \lambda - 2 = 3\lambda - 3 = 3(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda = 1.$$

Logo $X = (2, 3, 3) \Rightarrow \|\vec{PX}\| = \|(1, -1, 1)\| = \sqrt{3}$.

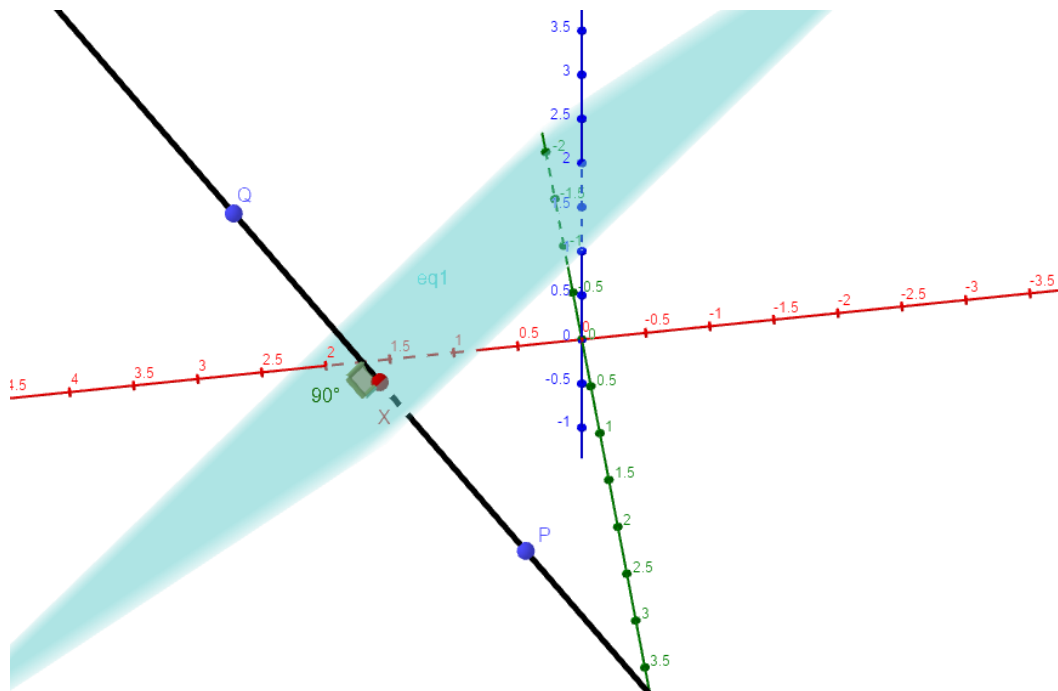
Seja Q o ponto simétrico do ponto P em relação ao plano π .
Então, $\|\vec{XQ}\| = \|\vec{PX}\| = \sqrt{3}$ e $Q = (1+\lambda, 4-\lambda, 2+\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como $\vec{XQ} = (\lambda-1, 1-\lambda, \lambda-1)$, segue que

$$3 = (\lambda-1)^2 + (1-\lambda)^2 + (\lambda-1)^2 = 3(\lambda-1)^2 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2$$

Portanto, $Q = (3, 2, 4)$

Observação: $P \neq Q$, logo $\lambda \neq 0$.



15. Determine os vértices B , C e D de um quadrado $ABCD$, sabendo que $A = (0, -19, 4)$, um lado está contido no plano $\pi_1 : 2x - 2y + z = 15$, outro, no plano $\pi_2 : 2x + y - 2z = 0$, e o plano do quadrado é perpendicular à reta interseção de π_1 e π_2 .

A equação paramétrica da reta interseção de π_1 e π_2 é

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = -5 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Assim um vetor normal ao plano que contém o quadrado é: $(\frac{1}{2}, 1, 1)$. Então a equação geral do plano é $\frac{1}{2}x + y + z + d = 0$ e como A pertence ao plano, então $d = 15$.

Observação: As coordenadas dos pontos B, C e D satisfazem a equação do plano π : $\frac{1}{2}x + y + z + 15 = 0$.

Por outro lado, temos:

Dado que as coordenadas do ponto A não satisfaz as equações dos planos π_1 e π_2 (Verifique!) então os lados AB e AD não estão contidos nos planos π_1 e π_2 .

Logo, os planos π_1 e π_2 contêm os lados BC e CD.

Em particular o ponto C pertence aos planos π_1 e π_2 .

Portanto, $C = (x, y, z)$ satisfaz as equações:

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 15 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = -30 \end{cases}$$

O sistema tem solução única.

Assim, $C = (0, -10, -5)$

Agora podemos supor que B é um ponto na interseção dos planos $2x - 2y + z = 15$ e $x + 2y + 2z = -30$.

Então, $B = (\lambda, \frac{1}{2}\lambda - 10, -\lambda - 5)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Logo $\vec{BA} = (-\lambda, -9 - \frac{1}{2}\lambda, 9 + \lambda)$ e $\vec{BC} = (-\lambda, -\frac{1}{2}\lambda, \lambda)$

e como $\vec{BA}$ e $\vec{BC}$ são ortogonais temos que:

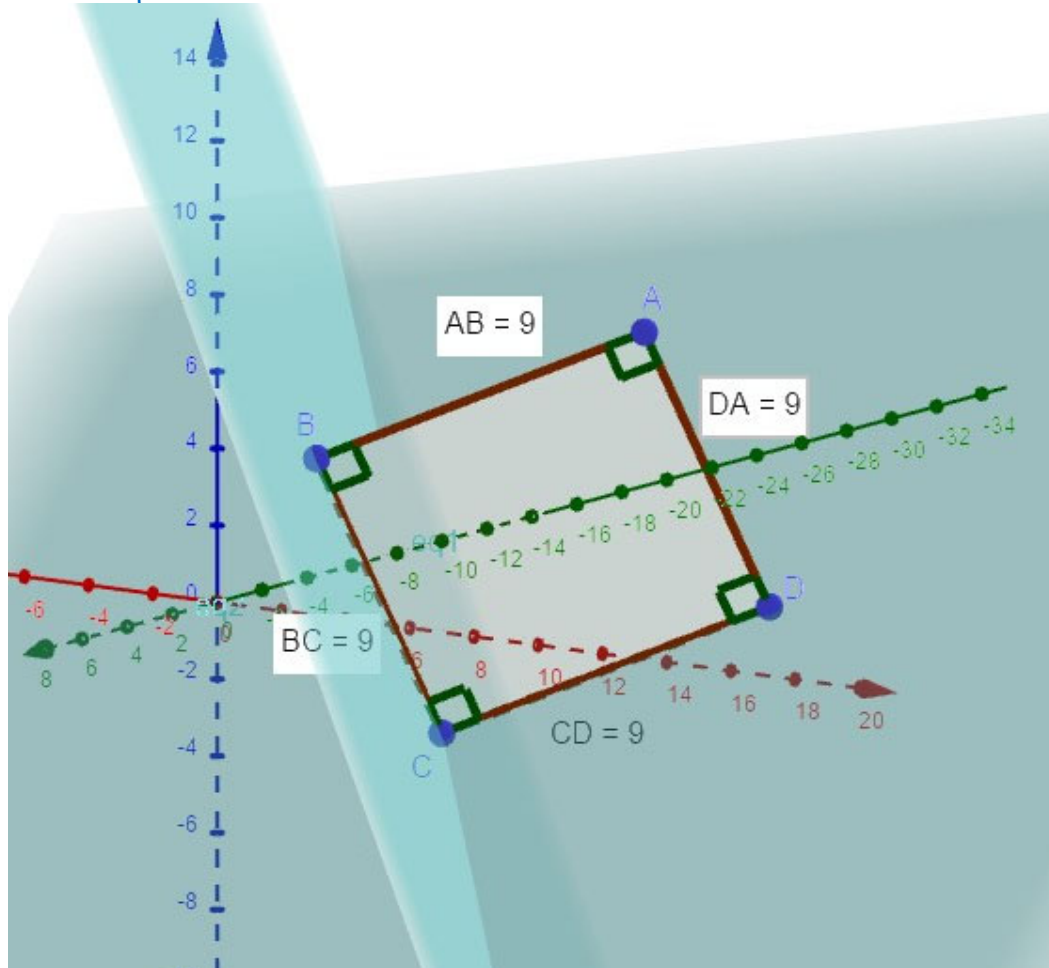
$$0 = (-\lambda)(-\lambda) + (-9 - \frac{1}{2}\lambda)(-\frac{1}{2}\lambda) + (9 + \lambda)(\lambda) = \frac{9}{4}\lambda(\lambda + 6)$$

Consequentemente, $\lambda = 0$ ou $\lambda = -6$.

Portanto, $B = (-6, -13, 1)$. $B \neq C = (0, -19, -5)$.

Finalmente, suponha que D é um ponto na interseção dos planos $2x + y - 2z = 0$ e $x + 2y + 2z = -30$.

Prove que $D = (6, -16, -2)$



Posição relativa, media angular, distância

Caderno: Lista2GA

Criada em: 06/06/2020 17:16

Atualizada... 09/07/2020 00:00

Autor: Oscar Armando Hernández Morales

Suponhamos que o sistema de coordenadas Σ é ortonormal positiva

1. Dadas as retas $r : X = (0, 1, 0) + \lambda(1, 0, 0)$ e $s : X = (-1, 2, -7) + \lambda(2, 1, -3)$, obtenha uma equação vetorial da reta t , concorrente com r e s e paralela a $\vec{u} = (1, -5, -1)$.

O vetor diretor da reta t é $\vec{u}$, então a equação da reta é $t: X = (a, b, c) + \lambda(1, -5, -1); \lambda \in \mathbb{R}$, em que (a, b, c) é um ponto da reta t . Logo $X = (a + \lambda, b - 5\lambda, c - \lambda)$.

Analogamente todo ponto da reta r é: $X = (\lambda, 1, 0)$ e todo ponto da reta s é: $X = (-1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -7 - 3\lambda)$

Como t e r são concorrentes existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A = (\lambda, 1, 0)$ é um ponto da reta t

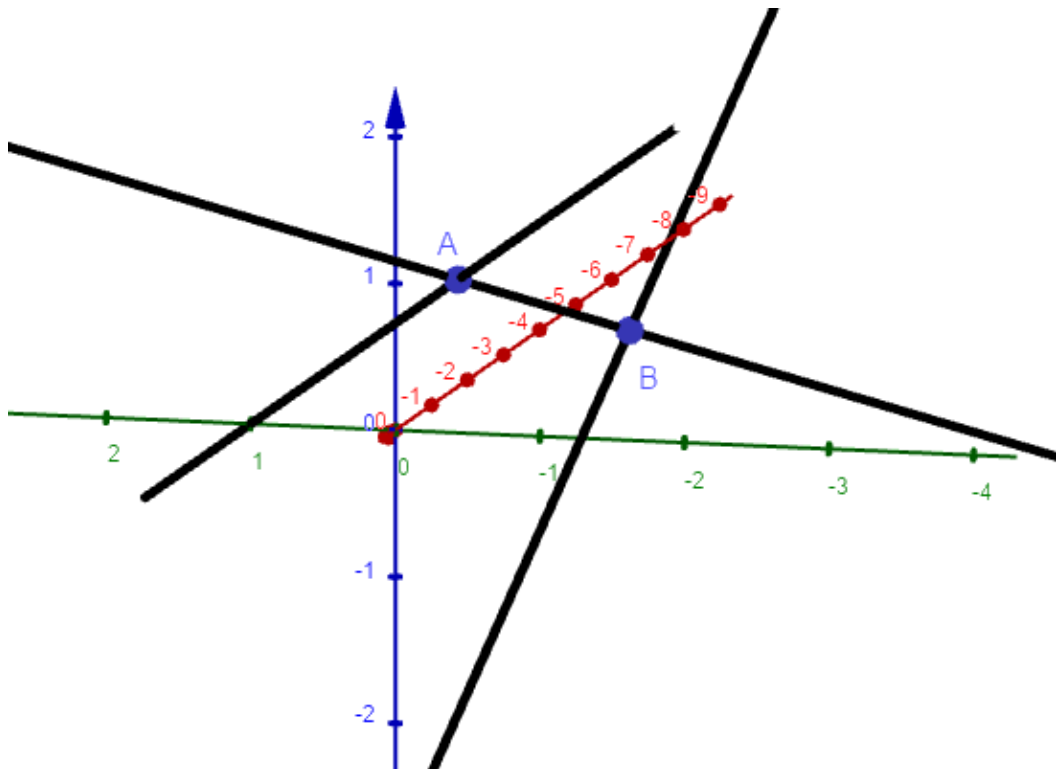
Como t e s são concorrentes existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $B = (-1 + 2\mu, 2 + \mu, -7 - 3\mu)$ é um ponto da reta t .

Logo $\vec{AB} = (-1 + 2\mu - \lambda, \mu + 1, -7 - 3\mu)$ é um vetor diretor de t .
Então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que
$$\begin{cases} -1 + 2\mu - \lambda = \alpha \\ \mu + 1 = -5\alpha \\ -7 - 3\mu = -\alpha \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{23}{4} \quad \mu = -\frac{9}{4} \quad \alpha = \frac{1}{4}$$

Portanto, $A = (-\frac{23}{4}, 1, 0)$ e a equação da reta t é:

$$X = (-\frac{23}{4}, 1, 0) + \lambda(1, -5, -1), \lambda \in \mathbb{R}.$$



2. Obtenha, em cada caso, uma equação vetorial da reta que contém P , é paralela ou contida no plano π e é concorrente com a reta r .

(a) $P = (1, 1, 0)$, $\pi : 2x + y - z - 3 = 0$, $r : X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$;

(b) $P = (1, 0, 1)$, $\pi : x - 3y - z = 1$, $r : X = (0, 0, 0) + \lambda(2, 1, -1)$;

(c) $P = (2, -1, 2)$, $\pi : x + y + z = 0$, r interseção dos planos $\pi_1 : x = z$ e $\pi_2 : z = y + 2$.

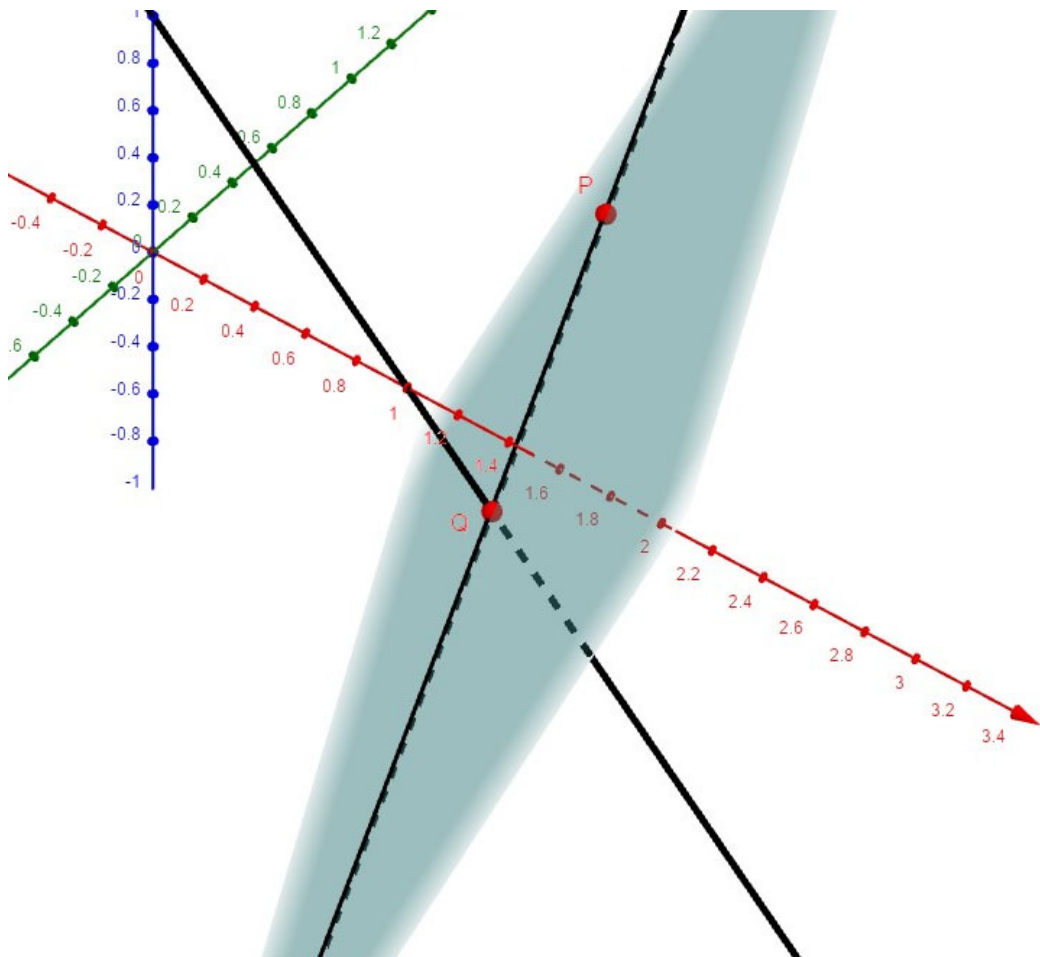
(a) Seja "s" a reta que contém P e é paralela ao plano π . Como r e s são concorrentes, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q = (1 - \lambda, 0, \lambda)$ pertence a reta "s".

Então o vetor $\vec{PQ} = (-\lambda, -1, \lambda)$ é um vetor paralelo ao plano π , assim este é ortogonal ao vetor $(2, 1, -1)$

Logo, $0 = (-\lambda)(2) + (-1)(1) + \lambda(-1) = -3\lambda - 1$. Então, $\lambda = -\frac{1}{3}$.

Portanto, $Q = (\frac{4}{3}, 0, -\frac{1}{3})$ e a equação da reta s é:

$$X = (1, 1, 0) + \lambda(\frac{1}{3}, -1, -\frac{1}{3}), \lambda \in \mathbb{R}.$$



b) Seja "s" a reta que contém P e é concorrente com "r".
 Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq. $C = (2\lambda, \lambda, -\lambda)$ pertence a "s".
 Logo o vetor $\vec{PC} = (2\lambda - 1, \lambda, -\lambda - 1)$ é um vetor diretor da reta "s".
 Por outro lado, $(1, -3, -1)$ é o vetor normal do plano π .
 Como $(1)(2\lambda - 1) + (-3)(\lambda) + (-1)(-\lambda - 1) = 2\lambda - 1 - 3\lambda + \lambda + 1 = 3\lambda - 3\lambda = 0$.
 Então $\vec{PC}$ é um vetor diretor do plano π , para todo " λ ".
 Isto mostra que existem infinitas retas "s".

Em particular para $\lambda = 0$ temos s: $X = (1, 0, 1) + \lambda(-1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$.
 $\lambda = 1$ temos s: $X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -2), \lambda \in \mathbb{R}$.
 $\lambda = -1$ temos s: $X = (1, 0, 1) + \lambda(-3, -1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.

3. O plano π contém $r: x - y = x + z - 1 = 0$ e determina, com os planos coordenados, um tetraedro de volume $\frac{1}{12}$. Obtenha os vértices do tetraedro e uma equação geral de π .

Dado que todo ponto da reta "r" é da forma $X = (\lambda, \lambda, -\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$ temos que $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ são pontos do plano π , uma vez que π contém r.

Em particular o plano π e o eixo "z" se intersectam no ponto $(0, 0, 1)$.
 Suponha que $(a, 0, 0)$ e $(0, b, 0)$ são as interseções do plano π com os eixos "x" e "y" respectivamente. Então, $(a, 0, -1)$ e $(0, b, -1)$ são vetores diretores do plano π . Logo, a equação de π é:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ a & 0 & -1 \\ 0 & b & -1 \end{vmatrix} = bx + ay + abz - ab$$

Por outro lado, o volume do tetraedro é: $\frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$
 em que $\vec{u} = (a, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, b, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$

$$\text{Como } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = ab, \text{ então } \frac{1}{6} |ab| = \frac{1}{12}$$

$$\text{Assim } ab = -\frac{1}{2} \text{ ou } ab = \frac{1}{2}$$

Caso: $ab = -\frac{1}{2}$

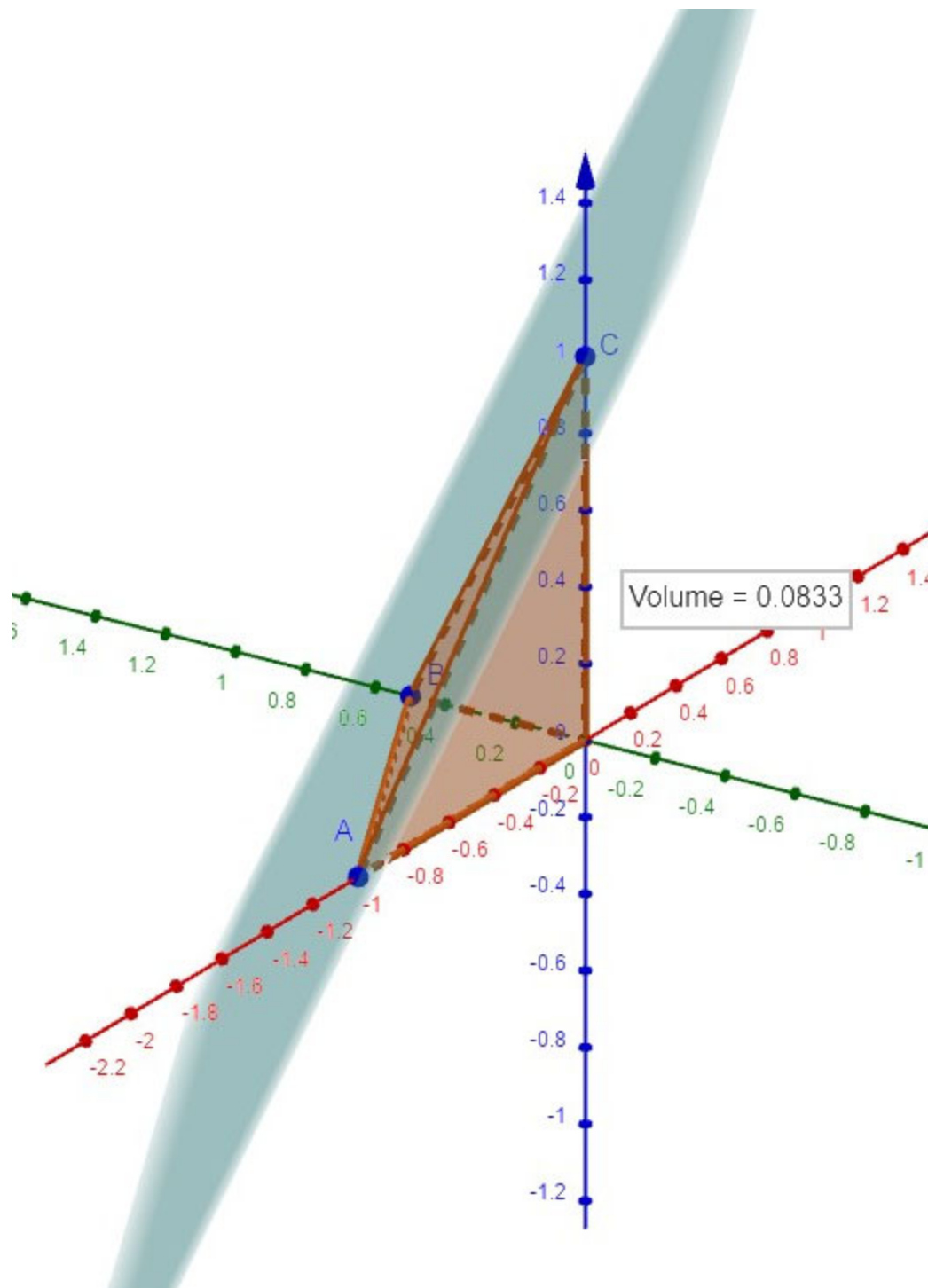
Neste caso a equação do plano π é: $2bx + 2ay - z + 1 = 0$
 Como $(1, 1, 0)$ é um ponto de π então, $2b + 2a + 1 = 0$

$$\text{Assim, } 2a^2 + a - 1 = 0. \text{ Portanto, } \begin{cases} a = -1 & \text{e } b = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ a = \frac{1}{2} & \text{e } b = -1. \end{cases}$$

Portanto, a equação do plano π é:

$$x - 2y - z + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2x - y + z - 1 = 0.$$

Caso $ab = \frac{1}{2}$?



4. Determine o vértice B de um triângulo retângulo ABC , sabendo que $A = (1, 1, 1)$ e a cota de C   maior que a de A ; a hipotenusa AC mede $\sqrt{3}$ e   ortogonal ao plano de equação $x + y - z - 10 = 0$; o lado AB é ortogonal as plano de equação $2x - y - z = 0$.

Seja $C = (x, y, z)$. Então $\vec{AC} = (x-1, y-1, z-1)$ é paralelo ao vetor $(1, 1, -1)$ e $\|\vec{AC}\| = \sqrt{3}$.

Logo, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x-1, y-1, z-1) = \alpha(1, 1, -1) = (\alpha, \alpha, -\alpha)$

Assim, $\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + (-\alpha)^2} = \sqrt{3}$. Portanto, $\alpha = \pm 1$.

Se $\alpha = 1$, então $C = (2, 2, -2)$. Absurdo! A cota de "C"   maior que a cota de "A".

Se $\alpha = -1$, então $C = (0, 0, 2)$.

Como $\vec{AC}$ é hipotenusa, então $\vec{BA}$ e $\vec{BC}$ são ortogonais.

Ademais, $\vec{BC}$ é paralelo ao vetor $(2, -1, -1)$.

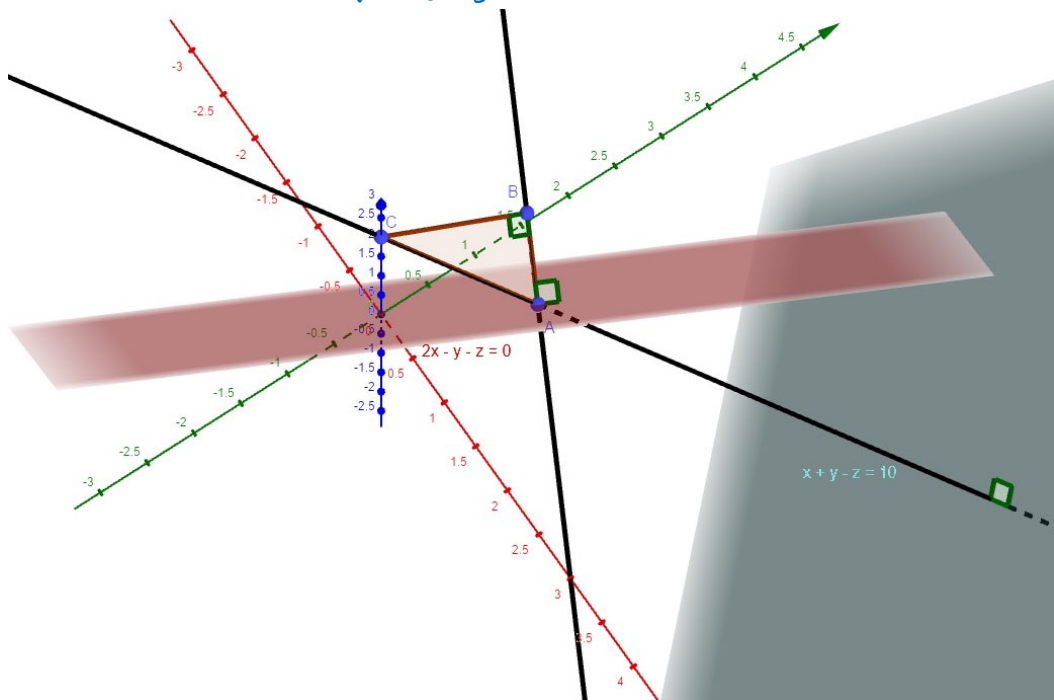
Seja $B = (x, y, z)$, então $\vec{AB} = (x-1, y-1, z-1) = \alpha(2, -1, -1) = (2\alpha, -\alpha, -\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$

Logo, $B = (2\alpha+1, -\alpha+1, -\alpha+1)$, $\vec{BA} = (-2\alpha, \alpha, \alpha)$, $\vec{BC} = (-2\alpha-1, \alpha-1, \alpha+1)$ e

$$0 = (-2\alpha)(-2\alpha-1) + (\alpha)(\alpha-1) + (\alpha)(\alpha+1) = 6\alpha^2 + 2\alpha = 2\alpha(3\alpha+1) \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -\frac{1}{3}$$

se $\alpha = 0$ então, $B = (1, 1, 1) = A$. Absurdo!

se $\alpha = -\frac{1}{3}$ então, $B = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.



5. Determine o ponto P na reta $r : X = (0, 2, 0) + \lambda(0, 1, 0)$ e o ponto Q na reta $s : X = (1, 2, 0) + \mu(0, 0, 1)$, tais que a reta PQ forme ângulos de $\frac{\pi}{4}$ com r e $\frac{\pi}{3}$ com s .

$P = (0, 2+\lambda, 0)$ e $Q = (1, 2, \mu)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$

Então, $\vec{PQ} = (1, -\lambda, \mu)$.

$$\text{Por hipótese: } \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{|(1, -\lambda, \mu) \cdot (0, 1, 0)|}{\|(1, -\lambda, \mu)\| \|(0, 1, 0)\|} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{|(1, -\lambda, \mu) \cdot (0, 0, 1)|}{\|(1, -\lambda, \mu)\| \|(0, 0, 1)\|} = \frac{|\mu|}{\sqrt{1+\lambda^2+\mu^2}}$$

$$\text{Então, } \begin{cases} 1+\lambda^2+\mu^2=2\lambda^2 \\ 1+\lambda^2+\mu^2=4\mu^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda^2+\mu^2=0 \\ 1+\lambda^2-3\mu^2=0 \end{cases} \Rightarrow 2-2\mu^2=0 \Leftrightarrow \mu=\pm 1 \\ \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}$$

Caso $\lambda=\sqrt{2}$, $\mu=1$

$$P=(0, 2+\sqrt{2}, 0) \quad \text{e} \quad Q=(1, 2, 1)$$

Caso $\lambda=\sqrt{2}$, $\mu=-1$

$$P=(0, 2+\sqrt{2}, 0) \quad \text{e} \quad Q=(1, 2, -1)$$

Caso $\lambda=-\sqrt{2}$, $\mu=1$

$$P=(0, 2-\sqrt{2}, 0) \quad \text{e} \quad Q=(1, 2, 1)$$

Caso $\lambda=-\sqrt{2}$, $\mu=-1$

$$P=(0, 2-\sqrt{2}, 0) \quad \text{e} \quad Q=(1, 2, -1)$$

6. Determine as extremidades B e D de uma das diagonais de um losango $ABCD$ contido no plano $\pi: x-y-z=0$, sabendo que $A=(3, 0, 3)$, $C=(1, 2, -1)$ e que o ângulo $\widehat{ABC}$ mede $\frac{2\pi}{3}$.

Seja $B=(x, y, z)$. Então, $\vec{AB}=(x-3, y, z-3)$, $\vec{CB}=(x-1, y-2, z+1)$.

Como $ABCD$ é um losango, então $\|\vec{AB}\|=\|\vec{CB}\| \Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2=\|\vec{CB}\|^2$

Logo $(x-3)^2+y^2+(z-3)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+z^2-6z+9=x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+2z+1$$

$$\Leftrightarrow -6x-6z+18=-2x-4y+2z+6$$

$$\Leftrightarrow x-y+2z-3=0$$

Como B pertence a plano π então, $x-y-z=0$.

Logo, $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Rightarrow z=1 \text{ e } y=x-1$.

Assim $B=(x, x-1, 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Como o ângulo $\widehat{ABC}=120^\circ$ e as diagonais do losango são bissetrizes temos que: $\widehat{BAC}=30^\circ$. Então,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(30^\circ) = \frac{\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle}{\|\vec{AC}\| \|\vec{AB}\|} = \frac{(-2, 2, -4) \cdot (x-3, x-1, -2)}{\sqrt{24} \sqrt{(x-3)^2+(x-1)^2+4}} = \frac{12}{2\sqrt{6} \sqrt{2x^2-8x+14}}$$

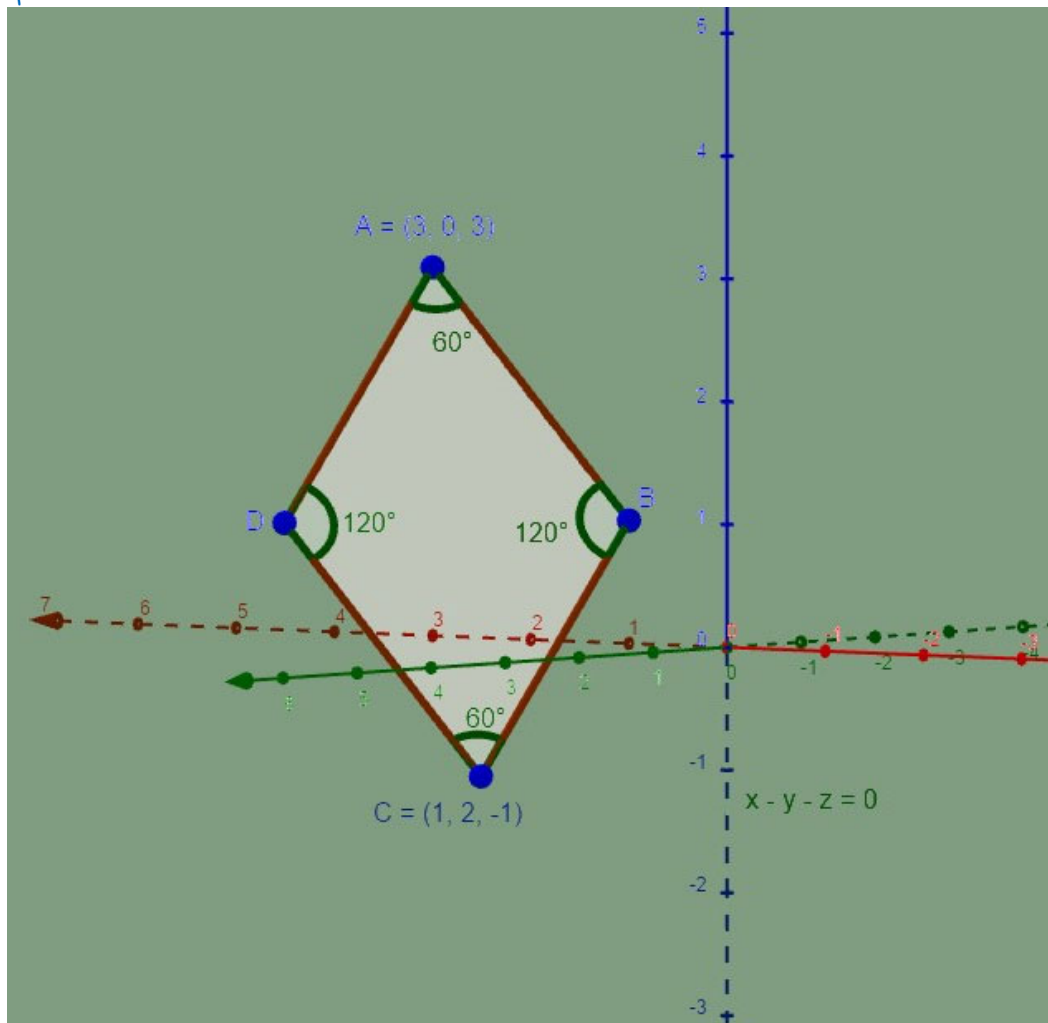
consequentemente,

$$\sqrt{2x^2-8x+14} = \frac{12}{\frac{12}{3\sqrt{2}}} = \frac{12}{3\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2x^2 - 8x + 14 = 4(2) = 8 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

Caso $x = 1 \Rightarrow B = (1, 0, 1)$ Caso $x = 3 \Rightarrow B = (3, 2, 1)$

Como D têm as mesma propriedades que B. Podemos concluir que $B = (1, 0, 1)$ e $D = (3, 2, 1)$.



Sugestão: Refaça o exercício considerando $\cos(120^\circ) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BA}\| \|\vec{BC}\|}$
ao invés de considerar $\cos(30^\circ) = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{\|\vec{AC}\| \|\vec{AB}\|}$

7. Obtenha a medida angular em radianos entre a reta r e o plano π .

(a) $r: x = y - z = 0$, $\pi: z = 0$ (b) $r: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1 - 2)$, $\pi: x + y - z - 1 = 0$.

(a) O vetor diretor da reta e' : $(0, 1, 1)$

O vetor normal ao plano π é: $(0, 0, 1)$

$$\cos(\theta) = \frac{(0, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\|(0, 1, 1)\| \|(0, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Portanto, } \theta = \frac{\pi}{4}.$$

8. Obtenha uma equação geral do plano que contém $r: x = z + 1 = y + 2$ e forma ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com $\pi: x + 2y - 3z + 2 = 0$.

Um ponto da reta r é: $(0, -2, -1)$ e o vetor diretor $(1, 1, 1)$
 O vetor normal a π : $(1, 2, -3)$.
 Suponha que $ax + by + cz + d = 0$ é a equação geral do plano. Então,

$$\begin{cases} -2b - c + d = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Logo, $a = b - d$ e $c = d - 2b$

Podemos supor que o vetor normal ao plano tem norma "1".

$$\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{|(a, b, c) \cdot (1, 2, -3)|}{\|(a, b, c)\| \|(1, 2, -3)\|} = \frac{|a + 2b - 3c|}{\sqrt{14}} = \frac{|9b - 4d|}{\sqrt{14}}$$

$$\text{Assim, } b = \frac{\sqrt{14}}{18} + \frac{4}{9}d \quad \text{ou} \quad b = \frac{4}{9}d - \frac{\sqrt{14}}{18}$$

$$\text{Caso: } b = \frac{4}{9}d + \frac{\sqrt{14}}{18}$$

Por conseguinte,

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 = (b - d)^2 + b^2 + (d - 2b)^2 = b^2 - 2bd + d^2 + b^2 + d^2 - 4bd + 4b^2 = 6b^2 - 6bd + 2d^2$$

$$\text{Logo, } 6\left(\frac{\sqrt{14}}{18} + \frac{4}{9}d\right)^2 - 6\left(\frac{\sqrt{14}}{18} + \frac{4}{9}d\right)d + 2d^2 - 1 = 0$$

$$\text{Portanto, } d = -\frac{2\sqrt{14}}{7} \quad \text{ou} \quad d = \frac{5\sqrt{14}}{14}$$

$$\text{Subcaso: } d = -\frac{2\sqrt{14}}{7}$$

$$\text{Temos: } b = -\frac{\sqrt{14}}{14}, \quad a = \frac{3\sqrt{14}}{14} \quad \text{e} \quad c = -\frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\text{Portanto, } 3x - y - 2z - 4 = 0.$$

Observação: o vetor normal não tem norma "1".
Existe alguma contradição?

$$\text{Subcaso: } d = \frac{5\sqrt{14}}{14}?$$

$$\text{Falta analisar o caso } b = \frac{4d}{9} - \frac{\sqrt{14}}{18}.$$

9. Determine o ponto do plano $\pi: 2x - y + z - 2 = 0$ tal que a soma de suas distâncias a $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (1, -1, -1)$ seja o menor possível.

Seja X um ponto qualquer do plano π . Então,
 A soma das suas distâncias a P e Q é $\|\vec{XP}\| + \|\vec{XQ}\|$
 Em particular, Q é um ponto do plano π (verifique!) Logo,
 $\|\vec{QP}\| + \|\vec{QQ}\| = \|\vec{QP}\| = \sqrt{6}$.

Agora, pela desigualdade triangular temos:

$$\sqrt{6} = \|\vec{PQ}\| = \|\vec{PX} + \vec{XQ}\| \leq \|\vec{PX}\| + \|\vec{XQ}\|$$

Portanto, Q é o ponto do plano π tal que a soma das suas distâncias é o menor possível.

10. A diagonal BD de um quadrado está contida em $r: x - 1 = y - z = 0$. Sendo O um dos vértices, determine os outros três.

Observe que $O = (0, 0, 0)$ não pertence a reta r .

Por hipótese B e D satisfazem a equação da reta " r ", logo existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $B = (1, \lambda, \lambda)$ e $D = (1, \mu, \mu)$

Também por hipótese $\|\vec{OB}\| = \|\vec{OD}\|$, então $\sqrt{1+2\lambda^2} = \sqrt{1+2\mu^2}$

Assim $\mu = \pm \lambda$. Mas $B \neq D$, então $B = (1, \lambda, \lambda)$ e $D = (1, -\lambda, -\lambda)$

E como $\vec{OB}$ e $\vec{OD}$ são ortogonais, temos $1 - 2\lambda^2 = 0$. Logo,

$$B = (1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{e} \quad D = (1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Seja $X = (x, y, z)$ o outro vértice do quadrado. Então X satisfaz

$$\vec{DX} \perp \vec{OD} \Leftrightarrow (x-1, y+\frac{\sqrt{2}}{2}, z+\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

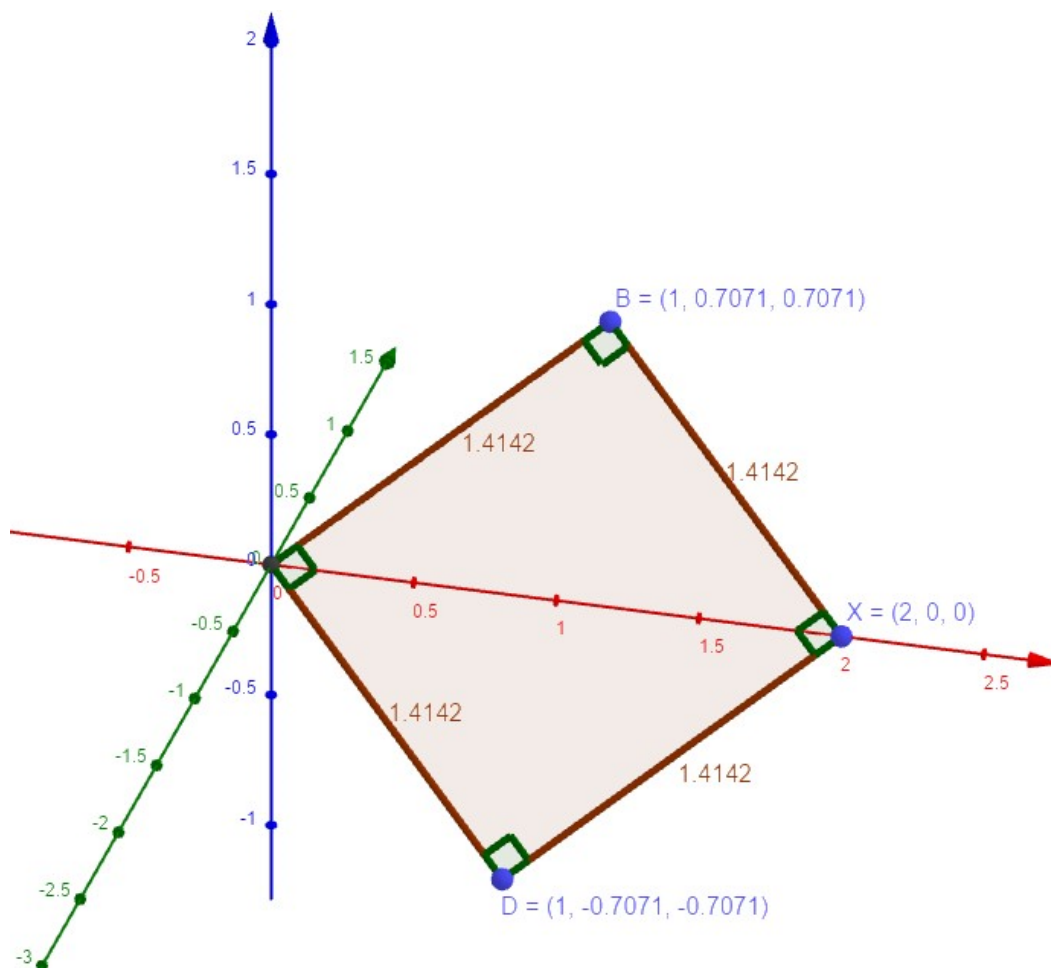
$$\vec{BX} \perp \vec{OB} \Leftrightarrow (x-1, y-\frac{\sqrt{2}}{2}, z-\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot (1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$\|\vec{OX}\| = \|\vec{BD}\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$$

Logo, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y - z = 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x + y + z = 2\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

Portanto, $X = (2, 0, 0)$.



11. Descreva o lugar geométrico dos pontos de E^3 que equidistam das retas $r : x - 1 = y + z = 3$, $s : 3x + y + z = x - y - z = 0$ e $t : x - y = x + z = 1 + z$.

Note que $\vec{v} = (0, -1, 1)$ é um vetor paralelo às 3 retas.

Seja $A = (4, 3, 0)$, $B = (0, 0, 0)$ e $C = (1, 0, 0)$

Então, $A \in r$, $B \in s$ e $C \in t$.

Se $P = (x, y, z)$ é um ponto equidistante das 3 retas:

$$d(P, r) = d(P, s) = d(P, t). \text{ Em que,}$$

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{AP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}, \quad d(P, s) = \frac{\|\vec{BP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} \quad \text{e} \quad d(P, t) = \frac{\|\vec{CP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

Observe que o ponto P satisfaz a seguinte condição equivalente:

$$\|\vec{AP} \times \vec{v}\| = \|\vec{BP} \times \vec{v}\| = \|\vec{CP} \times \vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{AP} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{BP} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{CP} \times \vec{v}\|^2$$

$$\vec{AP} = (x-4, y-3, z), \quad \vec{BP} = (x, y, z) \quad \text{e} \quad \vec{CP} = (x-1, y, z)$$

$$\vec{AB} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-4 & y-3 & z \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (y+z-3, 4-x, 4-x)$$

$$\vec{BP} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (y+z, -x, -x)$$

$$\vec{CP} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y & z \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (y+z, -x+1, -x+1)$$

$$(y+z-3)^2 + 2(x-4)^2 = (y+z)^2 + 2x^2 = (y+z)^2 + 2(x-1)^2$$

$$\text{Em particular} \quad 2x^2 = 2(x-1)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } (y+z-3)^2 + 2\left(\frac{49}{4}\right) = (y+z)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow (y+z)^2 - 6(y+z) + 9 + \frac{49}{2} = (y+z)^2 + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y+z = \frac{11}{2}$$

$$\text{Portanto, } P = \left(\frac{1}{2}, y, \frac{11}{2} - y\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{11}{2}\right) + y(0, 1, -1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Assim, o lugar geométrico é a reta que contém o ponto $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{11}{2}\right)$ e é paralela ao vetor $(0, 1, -1)$.

12. Mostre que os pontos $A = (-2, 0, 1)$, $B = (0, 0, -1)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (-2, -1, -2)$ e $E = (1, 2, 2)$ são vértices de uma pirâmide e calcule seu volume.

Como $\vec{AB} = (2, 0, -2)$ e $\vec{AD} = (0, -1, -3)$. A equação do plano π que contém A é:

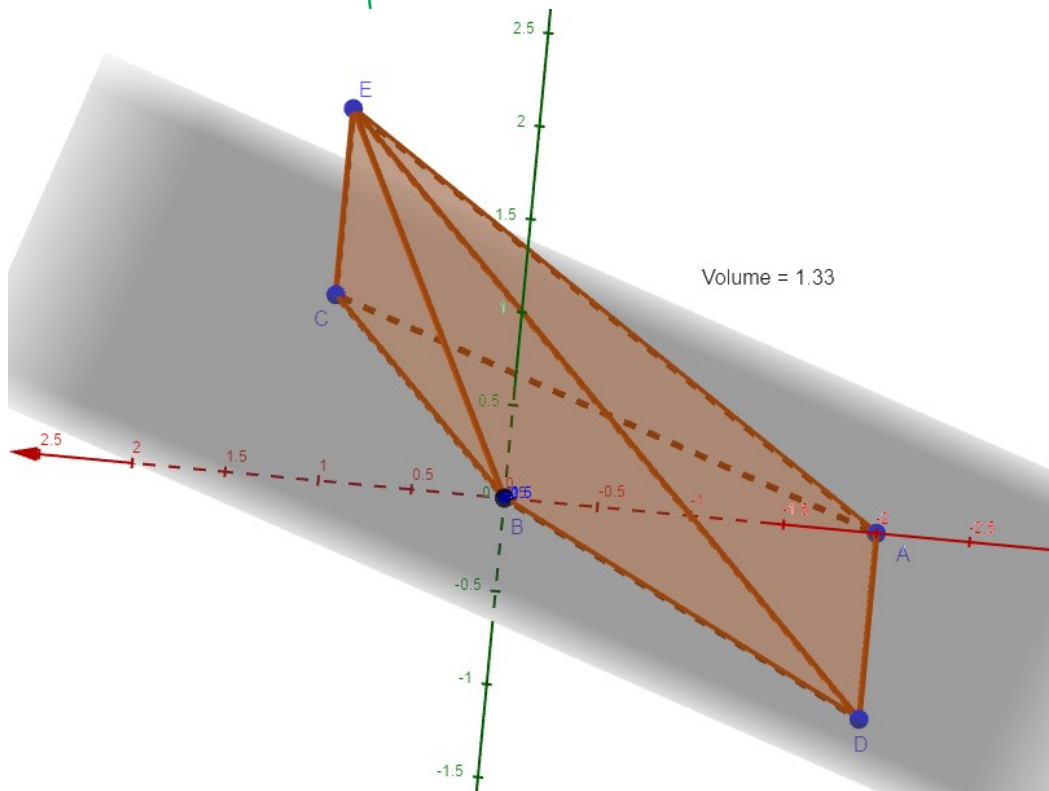
$$0 = \begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = (x+2) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} y & z-1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \\ = (x+2)(-2) - 2(-3y+z-1)$$

$$\text{Assim, } \pi: x-3y+z+1=0$$

Como $C \in \pi$ e $E \notin \pi$ (verifique!) Então os pontos A, B, C, D e E são vértices de uma pirâmide de volume:

$$\frac{1}{3} [\vec{AC}, \vec{AD}, \vec{AE}] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{3}$$

A base da pirâmide não é triangular.



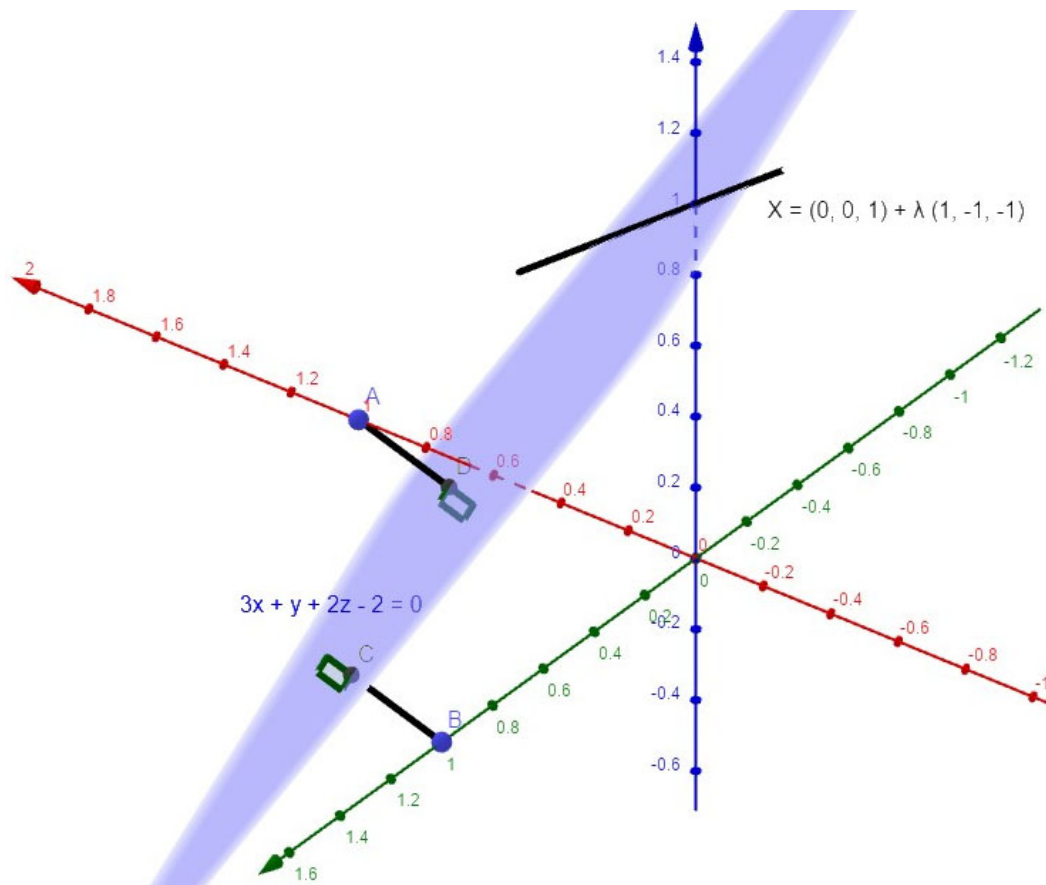
13. Obtenha uma equação geral do plano que contém a reta $r: x = -y = 1 - z$, equidista de $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 0)$ e separa A e B .

Como A e B equidistam do plano e este separa A e B logo, o ponto meio do segmento AB pertence ao plano. Então, $C = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ é um ponto do plano.

Por outro lado, o plano contém a reta " r " assim $D = (0, 0, 1)$ é outro ponto do plano e $\vec{v} = (1, -1, -1)$ é um vetor paralelo ao plano.

Portanto, a equação do plano é:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} = 3x + y + 2z - 2$$



14. Determine a reta r que contém o ponto $(1, 3, -1)$, é paralela ao plano $\pi : x + z = 2$ e dista 3 da reta $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$.

Seja $\vec{u} = (a, b, c)$ o vetor diretor da reta de norma 1.

Isto é, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Ademais, a equação da reta r é:

$$X = (1, 3, -1) + \lambda(a, b, c) = (1 + \lambda a, 3 + \lambda b, -1 + \lambda c), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Também, a reta r e o plano são paralelos logo os vetores (a, b, c) e $(1, 0, 1)$ são ortogonais. Logo $c = -a$. (*)

Consequentemente $b^2 = 1 - 2a^2$. (**)

Como a equação da reta s é: $X = (2, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
Podemos escolher $Q = (2, 0, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$

$$\text{Logo, } \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (b, c-a, -b) \stackrel{(*)}{=} (b, -2a, -b)$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{2b^2 + 4a^2} = \sqrt{2(b^2 + 2a^2)} \stackrel{(**)}{=} \sqrt{2}$$

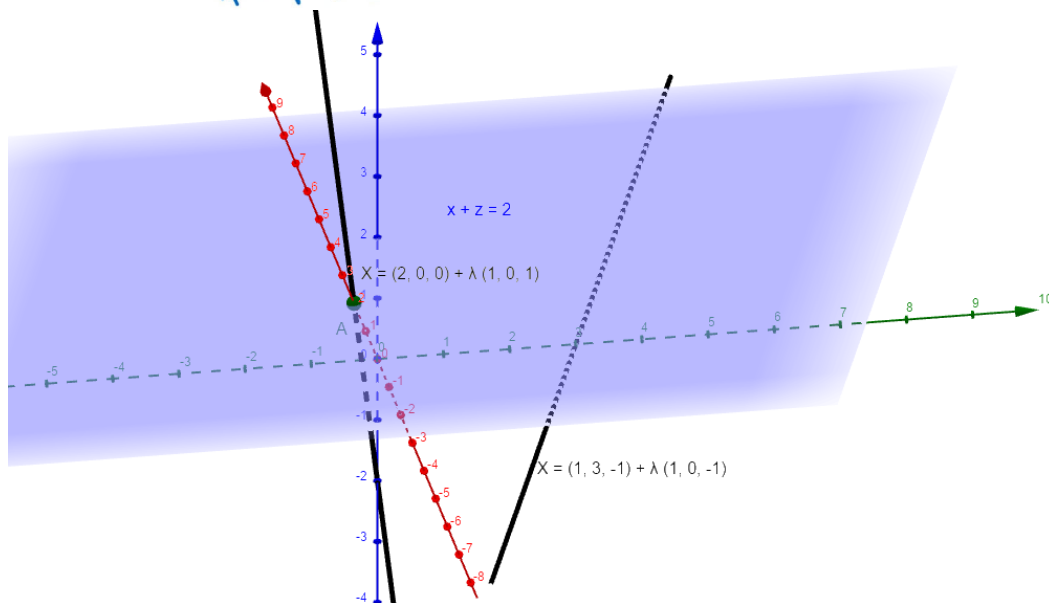
Ademas, $\vec{PQ} = (1, -3, 1)$. Assim $\vec{PQ} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = \cancel{b} + 6a - \cancel{b} = 6a$

Portanto, $d(r, s) = \frac{|\vec{QP} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{|6a|}{\sqrt{2}} = 3 \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por (*) e (**) temos: $b=0$ e $c = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$

Finalmente a equação da reta r é:

$$X = (1, 3, -1) + \lambda(1, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$$



15. Obtenha uma equação vetorial da reta que contém a origem, dista 2 de $s: X = (0, 1, 2) + \lambda(0, 1, 0)$ e forma ângulos congruentes com $t: X = (1, 1, 2) + \lambda(1, -1, 0)$ e $r: X = (2, 3, -1) + \lambda(1, 1, 0)$.

A equação da reta é $X = \lambda \vec{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ em que $\vec{u} = (a, b, c)$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$.

Como os ângulos entre as retas são congruentes temos:

$$\frac{|(a, b, c) \cdot (1, -1, 0)|}{(1)(\sqrt{2})} = \frac{|(a, b, c) \cdot (1, 1, 0)|}{(1)(\sqrt{2})} \Leftrightarrow |a-b| = |a+b|$$

Então,
$$\begin{cases} a-b=a+b \Leftrightarrow 2b=0 \Leftrightarrow b=0 \\ a-\cancel{b}=-a-\cancel{b} \Leftrightarrow 2a=0 \Leftrightarrow a=0. \end{cases}$$

Suponhamos $b=0$. Então, $\vec{u}=(a,0,c)$ tal que $a^2+c^2=1$.

Por hipótese $d(r,s)=2$. Mas $d(r,s)=\frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$

Em que $P=(0,0,0)$, $Q=(0,1,2)$ e $\vec{v}=(0,1,0)$

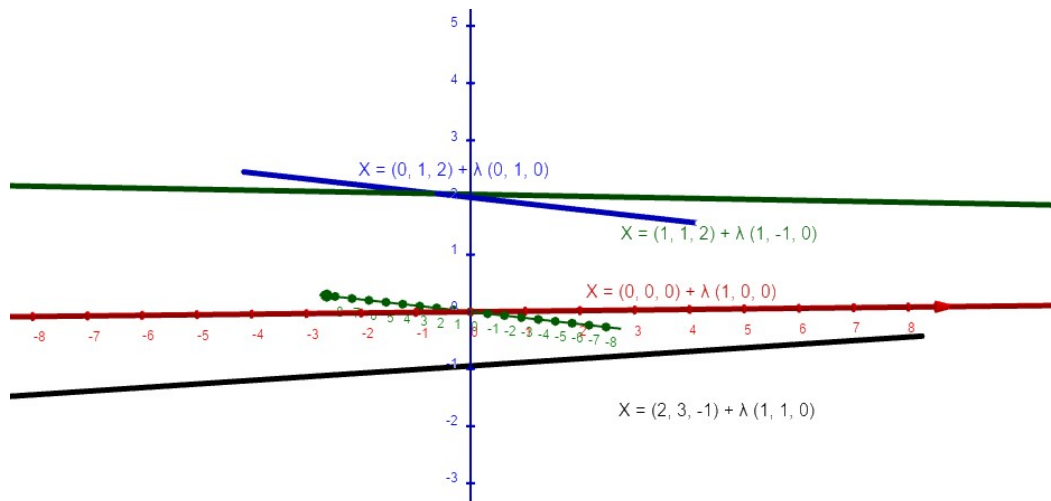
Logo, $\vec{PQ}=(0,1,2)$, $\|\vec{v}\|=1$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-c, 0, a) \Rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} = 2a$$

Portanto, $\frac{|2a|}{1} = 2 \Leftrightarrow a = \pm 1 \Rightarrow c=0$.

Finalmente a equação da reta é: $X=\lambda(1,0,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Observação: Faltava resolver o caso $a=0$.



16. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $P=(1,1,-1)$ e $Q=(2,1,1)$ e dista 1 da reta $r: X=(1,0,2)+\lambda(1,0,2)$.

Seja $\vec{n}=(a,b,c)$ o vetor normal ao plano π . Como $d(\pi, r) \neq 0$, então $\vec{n}$ e $(1,0,2)$ são ortogonais.

Assim $a+2c=0 \Leftrightarrow a=-2c$.

Suponha que $\|\vec{n}\|=1$, então $1=4c^2+b^2+c^2=b^2+5c^2$. (*)

Sebemos que $d(\pi, r)=d(A, \pi)$ em que A é um ponto qualquer de r . Escolhamos então $A=(0,0,0)$.

Logo, $1=d(P, \pi)=\frac{|a(0)+b(0)+c(0)+d|}{1}=|d|$. Assim $d=\pm 1$.

Caso $d=1$. Neste caso a equação de π é da forma.

$$0 = ax + by + cz + 1 = -2cx + by + cz + 1$$

Como P é um ponto de π , então, $0 = -2c + b - c + 1 = b - 3c + 1$

Assim $b = 3c - 1$ e por (*) temos: $(3c - 1)^2 + 5c^2 = 1$.

Portanto, $c = 0$ ou $c = \frac{3}{7}$.

Subcaso: $c = 0$. Temos $a = 0$ e $b = -1$. Portanto,

$$\pi: y = 1$$

Análise os outros casos.

17. Dentre os planos que distam 2 de $\pi: x - y + z = 0$, qual é o que está mais próximo de $P = (2, 1, 1)$?

Se π' é um plano que dista 2 unidades do plano π então π' e π são paralelos, logo $(1, -1, 1)$ é um vetor normal ao plano π' , então, $\pi': x - y + z + d = 0$ em que $2 = d(\pi, \pi') = d((0, 0, 0), \pi') = \frac{|d|}{\sqrt{3}}$.

Assim, $d = \pm 2\sqrt{3}$

Caso $d = 2\sqrt{3}$. Neste caso $\pi': x - y + z + 2\sqrt{3} = 0$

$$d(P, \pi') = \frac{|2 - 1 + 1 + 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = \frac{|2 + 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Caso $d = -2\sqrt{3}$. Temos $\pi': x - y + z - 2\sqrt{3} = 0$

$$d(P, \pi') = \frac{|2 - 1 + 1 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = \frac{|2 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}} = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, $\pi': x - y + z - 2\sqrt{3} = 0$.