

1ª parte: Vetores, operações com vetores.

1) Solução:

$$\begin{aligned}\vec{MN} &= \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN} \\ &= \frac{1}{2} \vec{AD} + \frac{2}{2} \vec{DC} + \frac{1}{2} \vec{CB} \\ &= \frac{1}{2} (\vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB}) + \frac{1}{2} \vec{DC} \\ &= \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{DC}\end{aligned}$$

Como $\vec{AB}$ e $\vec{DC}$ são paralelos, temos que:

$$\|\vec{AB} + \vec{DC}\| = \|\vec{AB}\| + \|\vec{DC}\|$$

$$\text{Portanto, } \|\vec{MN}\| = \frac{1}{2} (\|\vec{AB}\| + \|\vec{DC}\|)$$

Cuidado! Em geral $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Solução alternativa:

$$\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB} = 2\vec{MD} + \vec{DC} + 2\vec{CN}$$

Então,

$$\vec{AB} + \vec{DC} = 2\vec{MD} + 2\vec{DC} + 2\vec{CN} = 2(\vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN}) = 2\vec{MN}$$

$$\text{Portanto, } \frac{\vec{AB} + \vec{DC}}{2} = \vec{MN}.$$

2) a) Como $\vec{AO} = \vec{OD}$, temos que:

$$\vec{AO} + \vec{FO} + \vec{DC} = \vec{OD} + \vec{FO} + \vec{DC} = \vec{FO} + \vec{OD} + \vec{DC} = \vec{FC}$$

b) Note que: $\vec{AD} = 2\vec{AO}$

$$\vec{AC} + \vec{AF} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD} = 2\vec{AO}$$

$$\vec{AB} + \vec{AE} = \vec{ED} + \vec{AE} = \vec{AD} = 2\vec{AO}$$

Logo,

$$\vec{AD} + \vec{AC} + \vec{AF} + \vec{AB} + \vec{AE} = 2\vec{AO} + 2\vec{AO} + 2\vec{AO} = 6\vec{AO}$$

c) $\vec{DG}$, $\vec{OG}$, $\vec{EG}$ não existem, pois G não está definido.

3) Como X é ponto meio de AB então

$$\vec{BX} = -\vec{AX}$$

$$\vec{CX} = \vec{CA} + \vec{AX}$$

$$\vec{CX} = \vec{CB} + \vec{BX} = \vec{CB} - \vec{AX}$$

Portanto,

$$2\vec{CX} = \vec{CA} + \vec{CB}$$

$$\Rightarrow \vec{CX} = \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB}$$

1ª Parte.

Exercício 9.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} + \frac{4}{4} \overrightarrow{DC} + \frac{1}{4} \overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) + \frac{3}{4} \overrightarrow{DC} \\ &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{DC}.\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ são paralelos, então, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$

tg. $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{DC}$

Logo, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4} \alpha \overrightarrow{DC} + \frac{3}{4} \overrightarrow{DC} = \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{3}{4} \right) \overrightarrow{DC}$

Portanto, $\overrightarrow{MN}$ é paralelo a $\overrightarrow{DC}$.

1ª Parte.

7) Aplique o exercício 3) da 1ª parte.

8) " " " " da 2ª parte.

10) Seja A' o ponto meio do lado BC .
" B' " " " " " AC .
" C' " " " " " AB .

Seja D o ponto do plano tal que:

$$\vec{C'D} = \vec{AA'}.$$

$$\text{Então, } \vec{DC} = \vec{DC'} + \vec{C'C} = -\vec{C'D} - \vec{CC'} = -\vec{AA'} - \vec{CC'}$$

Por outro lado,

$$\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 0, \text{ pelo exercício 7, parte 1.}$$

$$\text{Então, } \vec{BB'} = -\vec{CC'} - \vec{AA'}$$

$$\text{Portanto, } \vec{DC} = \vec{BB'}.$$

11) Parte 1ª.

Seja M o ponto meio de AB .

Então, $\vec{CX} = \frac{2}{3} \vec{CM}$, pois X é baricentro.

e $\vec{CM} = \frac{1}{2} \vec{CA} + \frac{1}{2} \vec{CB}$, pelo exercício 3, ~~parte 1ª.~~

$$\begin{aligned}\text{Logo, } \vec{CX} &= \frac{1}{3} \vec{CA} + \frac{1}{3} \vec{CB} \\ &= \frac{1}{3} (\vec{OA} - \vec{OC}) + \frac{1}{3} (\vec{OB} - \vec{OC}) \\ &= \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB} - \frac{2}{3} \vec{OC}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\vec{OX} &= \vec{OC} + \vec{CX} = \vec{OC} + \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB} - \frac{2}{3} \vec{OC} \\ &= \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{1}{3} \vec{OC}\end{aligned}$$

2ª Dependência e independência linear dos vetores, bases.

1) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos então são l.i.

Logo, $(2\alpha - 2\beta)\vec{u} + (\alpha + \beta - 2)\vec{v} = 0$

$(\Rightarrow) \begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta - 2 = 0 \end{cases}$ portanto, $\alpha = \beta = 1$.

4) Lembrando $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto L.D.

$(\Rightarrow)$ dado α, β, γ tq. $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0$

então, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto L.D.

se existe α, β, γ não todos nulos tais que:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = 0.$$

equivalentemente,

$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto L.D. se existem

α, β tq. $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

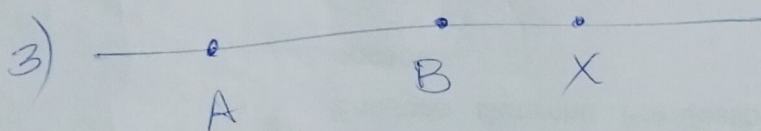
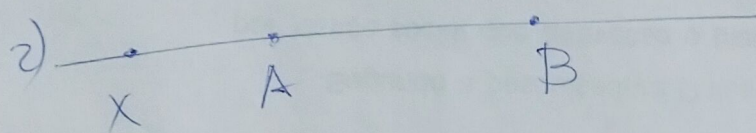
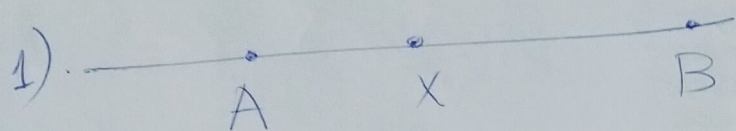
Seja $\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} \\ \vec{w}_2 = 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w} \\ \vec{w}_3 = \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w} \end{cases}$

$\vec{w}_3 = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2$

Como $(-3)\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 = \vec{w}_3$ temos que $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ é L.D.

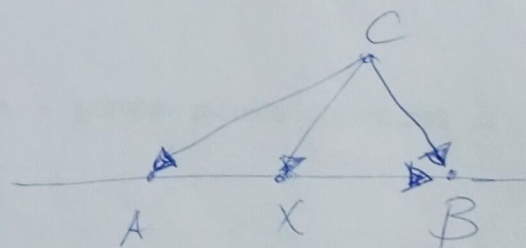
2ª Dependência e independência linear dos vetores, bases:

3) Suponha que C não pertence à reta AB .
Então ABC formam um triângulo, e dado que X pertence à reta AB temos 3 casos:



Considere o caso 1).

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ tq. $\vec{XB} = \alpha \vec{AB}$.



Então,

$$\begin{aligned}\vec{CX} &= \vec{CB} + \vec{BX} = \vec{CB} - \alpha \vec{AB} = \vec{CB} - \alpha (\vec{AC} + \vec{CB}) \\ &= \vec{CB} - \alpha \vec{CB} - \alpha \vec{AC} = (1 - \alpha) \vec{CB} + \alpha \vec{CA}.\end{aligned}$$

Defina $\beta = 1 - \alpha$, então $\beta + \alpha = 1$.

5) a) $\vec{v}, \vec{w}$ são L.D. $\Rightarrow$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq.
 $\vec{v} = \alpha \vec{w} \Rightarrow (1, m, n+1) = (\alpha m, \alpha n, 2\alpha).$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha m \\ m = \alpha n \\ n+1 = 2\alpha \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{m}} \quad \begin{cases} m = \frac{n}{m} \\ n+1 = \frac{2}{m} \end{cases} \rightarrow \boxed{m^2 = n} \quad \begin{cases} m^2 + 1 = \frac{2}{m} \end{cases}$$

Temos $m^3 + m - 2 = 0.$

$m = 1$ é uma solução.

$$m^3 + m - 2 = (m-1)(m^2 + m + 2)$$

Assim $m^2 + m + 2 = 0$, não tem solução

Portanto, $\boxed{n = 1 = m.}$

6) a) Por hipótese, existem, α, β não ambos nulos tais que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = 0.$

$$\text{Então, } \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + 0 \cdot \vec{w} = 0$$

Portanto, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são L.D.

Solução alternativa.

Por hipótese, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq. $\vec{v} = \alpha \vec{u}.$

$$\text{Então, } \vec{v} = \alpha \vec{u} + 0 \vec{w}$$

Portanto, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ são L.D.

3ª Bases, base ortonomais, mudança de base

$$2) \quad \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OC} + \frac{1}{2} \vec{OB}$$

$$\text{Portanto, } \vec{AM} = -\vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB} + \frac{1}{2} \vec{OC}.$$

$$3) \text{ Seja } F = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

$$\text{Então, } \vec{u} = (1, 1, 0)_E$$

$$\vec{v} = (1, 1, 1)_E$$

$$\vec{w} = (a, b, c)_E$$

$$\text{Logo, } M_{E \rightarrow F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

F é base se e só se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é um conjunto l.i.

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = a - b, \text{ portanto, } a \neq b.$$

$$4) \text{ b) } \vec{u} = (0, 1, 0)_F = 0\vec{f}_1 + 1\vec{f}_2 + 0\vec{f}_3 = \vec{f}_2 = m\vec{e}_1 + 2m\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (m, 2m, -1)_E.$$

$$\text{Portanto, } m = 1.$$

(5) c) $M_{EF} = M_{E \rightarrow F}$.

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \vec{f}_1 &= 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 &= \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 &= 3\vec{e}_3 \end{aligned}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\begin{pmatrix} \vec{f}_1 \end{pmatrix}_E \quad \begin{pmatrix} \vec{f}_2 \end{pmatrix}_E \quad \begin{pmatrix} \vec{f}_3 \end{pmatrix}_E$

$$\boxed{\vec{e}_3 = \frac{1}{3} \vec{f}_3} \Rightarrow \vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \frac{1}{3} \vec{f}_3$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e}_2 = \vec{f}_2 + \frac{1}{3} \vec{f}_3}$$

$$\vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \left(\vec{f}_2 + \frac{1}{3} \vec{f}_3 \right) + \frac{1}{3} \vec{f}_3 = 2\vec{e}_1 - \vec{f}_2$$

$$\Rightarrow 2\vec{e}_1 = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e}_1 = \frac{1}{2} \vec{f}_1 + \frac{1}{2} \vec{f}_2}$$

$$M_{FE} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

6) Como E é base $\Rightarrow F$ é base se e só se os vetores $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $m\vec{e}_2 - \vec{e}_3$, $\vec{e}_1 + m\vec{e}_3$ são L.I.

$$\text{Como } \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1, 1, 0)$$

$$m\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (0, m, -1)$$

$$\vec{e}_1 + m\vec{e}_3 = (1, 0, m)$$

Estes vetores são L.I se e só se

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} \neq 0.$$

Portanto, $m \neq \pm 1$.

4ª Produto escalar, produto vetorial.

$$1) \langle \vec{AB}, \vec{DA} \rangle = \vec{AB} \cdot \vec{DA} = \|\vec{AB}\| \|\vec{DA}\| \cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{DA}}) \\ = (1)(1) \cos(120^\circ).$$

$$2) \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) + (1)(-1) + (2)(-2) = 0$$

$$7) \|\vec{u}\| = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 27$$

$$(x, y, z) \cdot (2, 3, -1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - z = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (2, -4, 6) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3z = 0$$

$$8) \|\vec{u}\| = \sqrt{5}, \vec{u} \cdot \vec{t} = 0, \vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}, \text{ para algum } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} = (x, y, z) \rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(0, 1, -1) \\ = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha - \beta).$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow y + z = 2\alpha = 2x.$$

$$\text{Temos: } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ 2x + y - z = 0 \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$$

$$4) \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

Logo,

$$\begin{aligned} (-\vec{u}) \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|-\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - (-\vec{u})\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} + \vec{u}\|^2). \end{aligned}$$

Portanto,

$$2 \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (-\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 + \|\vec{v} + \vec{u}\|^2)$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} 4 \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \\ &= \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

6) Se $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ então $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Por 4) a) temos:

$$0 = 4(0) = 4\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$

$$\text{Assim, } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

Reciprocamente, se $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ então, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

Utilize 4) a).

3) Seja $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ a base ortogonal
então $E = \left\{ \frac{f_1}{\|f_1\|}, \frac{f_2}{\|f_2\|}, \frac{f_3}{\|f_3\|} \right\}$ é uma
base ortonormal.

$$\text{Seja } e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, \quad e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}, \quad e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|}$$

Então,

$$\begin{aligned} \vec{u} = (1, 0, 1)_F &= f_1 + f_3 = \|f_1\| \frac{f_1}{\|f_1\|} + \|f_3\| \frac{f_3}{\|f_3\|} \\ &= \|f_1\| e_1 + \|f_3\| e_3 = (\|f_1\|, 0, \|f_3\|)_E. \end{aligned}$$

faça o mesmo para $\vec{v}$

Logo, poderá calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$
pois E é ~~uma~~ base ortonormal.