

Valoração e forma disjuntiva normal

Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Usaremos a notação L para o conjunto das fórmulas da lógica proposicional e por P o conjunto das fórmulas atômicas.

Uma *valoração* é uma função $V : L \rightarrow \{0, 1\}$ que satisfaz as seguintes propriedades, para todos A e B pertencentes a L :

- $V(\neg A) = 1 - V(A)$;
- $V(A \wedge B) = 1$ se, e somente se, $V(A) = 1$ e $V(B) = 1$;
- $V(A \vee B) = 1$ se, e somente se, $V(A) = 1$ ou $V(B) = 1$;
- $V(A \rightarrow B) = 1$ se, e somente se, $V(A) = 0$ ou $V(B) = 1$;
- $V(A \leftrightarrow B) = 1$ se, e somente se, $V(A) = V(B)$.

Uma fórmula A é dita *tautologia* se $V(A) = 1$, para toda valoração V . Uma fórmula A é dita *contradição* se $V(A) = 0$, para toda valoração V . Se A não é tautologia nem contradição, dizemos que A é uma *contingência*. Note que A é contingência se, e somente se, existe uma valoração V tal que $V(A) = 1$ e outra valoração V' tal que $V'(A) = 0$.

Dizemos que uma fórmula A é *verdadeira* mediante uma valoração V se $V(A) = 1$, e *falsa* mediante uma valoração V se $V(A) = 0$.

Há três teoremas principais sobre a semântica da lógica proposicional. Os dois primeiros justificam o método da tabela verdade. O terceiro oferece uma espécie de “engenharia reversa” da tabela verdade, mostrando como escrever uma fórmula na forma disjuntiva normal.

Teorema 1 *Se $v : P \rightarrow \{0, 1\}$ é uma função, existe uma única valoração V tal que $V|_P = v$, isto é, $V(p) = v(p)$, para todo $p \in P$.*

Demonstração: A parte da unicidade é mais simples e pode ser provada por indução na complexidade da fórmula. A saber: se V e V' são valorações tais que $V|_P = V'|_P = v$, prova-se que o conjunto $X = \{A \in L : V(A) = V'(A)\}$ é indutivo e, portanto, igual a L . Os detalhes são deixados como exercício.

Mostaremos a existência.

Sendo L_n o conjunto das fórmulas de grau menor ou igual a n , definiremos $V_n : L_n \rightarrow \{0, 1\}$ recursivamente. Tomamos $V_0 = v$ (o que faz sentido, pois $L_0 = P$). Suponha definida V_n . Definiremos $V_{n+1} : L_{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ do seguinte modo: se $A \in L_n$, definimos $V_{n+1}(A) = V_n(A)$; se $A \in L_{n+1} \setminus L_n$ é da forma $(B \wedge C)$, temos

$B, C \in L_n$ e definimos $V_{n+1}(A) = 1$, se $V_n(B) = 1$ e $V_n(C) = 1$, e $V_{n+1}(A) = 0$, caso contrário; se $A \in L_{n+1} \setminus L_n$ é da forma $(\neg B)$, ou $(B \vee C)$, ou $(B \rightarrow C)$, ou $(B \leftrightarrow C)$, a definição de $V_{n+1}(A)$ é análoga, usando a definição de valoração para cada conectivo.

Note que o teorema da unicidade da representação de fórmulas é essencial para que V_{n+1} esteja bem definida a partir de V_n , pois é necessário que A , como acima, não possa ter duas representações diferentes. Note ainda que $V_n \subseteq V_{n+1}$, para todo n . Tome $V = \bigcup \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Temos que V é uma função de L em $\{0, 1\}$ e é uma valoração. Os detalhes são deixados para o leitor verificar.

Esboço de uma demonstração alternativa (e mais rigorosa): Defina V como a intersecção de todas as relações $R \subseteq L \times \{0, 1\}$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- $v \subseteq R$;
- Se $(A, i) \in R$, então $((\neg A), 1 - i) \in R$;
- Se $\{(A, i), (B, j)\} \subseteq R$, então $((A \wedge B), i \cdot j) \in R$;
- Se $\{(A, i), (B, j)\} \subseteq R$, então $((A \vee B), 1 - (1 - i) \cdot (1 - j)) \in R$;
- Se $\{(A, i), (B, j)\} \subseteq R$, então $((A \rightarrow B), 1 - i \cdot (1 - j)) \in R$;
- Se $\{(A, i), (B, i)\} \subseteq R$, então $((A \leftrightarrow B), 1) \in R$;
- Se $\{(A, i), (B, 1 - i)\} \subseteq R$, então $((A \leftrightarrow B), 0) \in R$.

Note que essa coleção é não vazia porque $R = L \times \{0, 1\}$ satisfaz as propriedades acima. Analogamente ao que provamos ao definir grau de complexidade de fórmula, prova-se que V é uma função de domínio L , imagem contida em $\{0, 1\}$ e que é uma valoração. ■

Lembrando que $Subf(A)$ indica o conjunto das subfórmulas de A , o próximo teorema diz que a valoração de uma fórmula depende apenas de seus valores nas subfórmulas atômicas.

Teorema 2 *Sejam V e V' duas valorações e A uma fórmula. Se $V|_{P \cap Subf(A)} = V'|_{P \cap Subf(A)}$ então $V(A) = V'(A)$.*

Demonstração: Provaremos o teorema por indução na complexidade da fórmula A . Isto é, fixando V e V' , provaremos que o conjunto de todas as fórmulas A que satisfazem o enunciado do teorema é indutivo.

É imediato que o teorema é verdadeiro quando A é uma fórmula atômica. Isso porque, nesse caso, $P \cap Subf(A) = \{A\}$, de modo que o enunciado do teorema torna-se trivial, nesse caso.

Suponha que o teorema seja verdadeiro para as fórmulas A e B , e seja C a fórmula $(A \wedge B)$. Mostremos que C satisfaz o teorema. Suponha que vale a hipótese $V|_{P \cap Subf(C)} = V'|_{P \cap Subf(C)}$. Pela definição de subfórmulas, temos que $Subf(C) =$

$\{C\} \cup \text{Subf}(A) \cup \text{Subf}(B)$. Em particular, $(P \cap \text{Subf}(A)) \subseteq (P \cap \text{Subf}(C))$ e $(P \cap \text{Subf}(B)) \subseteq (P \cap \text{Subf}(C))$. Logo, temos $V|_{P \cap \text{Subf}(A)} = V'|_{P \cap \text{Subf}(A)}$ e $V|_{P \cap \text{Subf}(B)} = V'|_{P \cap \text{Subf}(B)}$. Portanto, pela hipótese indutiva, temos $V(A) = V'(A)$ e $V(B) = V'(B)$. Da definição de valoração segue que $V(A \wedge B) = V'(A \wedge B)$, isto é, $V(C) = V'(C)$. Nos outros casos – quando C é da forma $\neg A$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ ou $A \leftrightarrow B$ – o argumento é o mesmo. ■

Vejam os dois teoremas servem como fundamentação teórica para o método da tabela verdade.

Cada linha da tabela verdade construída para uma fórmula A corresponde a uma função de $\{p_{k_1}, \dots, p_{k_n}\}$ em $\{0, 1\}$, onde $(p_{k_i})_{1 \leq i \leq n}$ são as subfórmulas atômicas de A . Note que existem infinitas valorações (na verdade, um conjunto infinito não enumerável de valorações!), de modo que seria impossível testarmos todas as valorações. Mas o Teorema 2 nos diz o que já nos parecia óbvio: não interessa, para fins de avaliar os possíveis valores de uma fórmula, o valor das fórmulas atômicas que não constam na fórmula. Podemos entender cada linha da tabela verdade como uma classe de equivalência das valorações que são iguais nas subfórmulas atômicas de A . Então, enquanto temos infinitas não enumeráveis valorações, temos apenas 2^n classes de equivalência de valorações, sendo n o número de subfórmulas atômicas de A .

Quando verificamos que uma fórmula A é tautologia (ou contradição) através da tabela verdade, testamos apenas uma quantidade finita de valorações, e usamos o Teorema 2 para justificar por que podemos concluir que todas as valorações atribuem o valor verdadeiro à fórmula A . Tudo bem, poderíamos justificar que não precisaríamos usar o teorema nesse caso, pois quando provamos que uma linha atribui o valor verdadeiro já estamos argumentando, implicitamente, que qualquer valoração que assume aqueles valores nas fórmulas atômicas atribui o valor verdadeiro a A . E, assim, o método da tabela verdade testa de fato todas as valorações, pois em cada linha se aplica o argumento para todas as valorações de uma classe de equivalência. De fato, o teorema não é necessário para uma prova *ad hoc*, ou seja, aplicada especificamente a uma fórmula. Mas serve para provar que o método da tabela verdade sempre irá funcionar (pelo menos, por enquanto, nos casos em que dá tautologia ou contradição) em qualquer fórmula.

Por outro lado, quando a fórmula A é uma contingência, precisamos do Teorema 1 para chegarmos a tal conclusão rigorosamente, a partir do método da tabela verdade. Note que, para A ser uma contingência, basta que uma linha da tabela verdade seja verdadeira e que outra linha seja falsa¹. Mas como saber se cada linha dessa corresponde a uma valoração? Uma função de $\{p_{k_1}, \dots, p_{k_n}\}$ em $\{0, 1\}$ se estende facilmente a uma função de P em $\{0, 1\}$ (por exemplo, assumindo o valor 0 em todas as outras fórmulas atômicas). E pelo Teorema 1 se estende a uma valoração. Assim, a uma linha da tabela verdade que marca uma fórmula como verdadeira (ou falsa) existe, de fato, uma valoração associada mediante a qual a fórmula é verdadeira (ou falsa).

¹Logo, se você estiver resolvendo um exercício que pede apenas para decidir se a fórmula é tautologia, contradição ou contingência, caso ache duas linhas que atribuam valores diferentes você não precisa completar a tabela verdade.

Fórmulas equivalentes e forma disjuntiva normal Duas fórmulas A e B são *equivalentes* se para toda valoração V temos $V(A) = V(B)$. Ou seja, A e B são equivalentes se $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia. Utilizamos a notação $A \equiv B$ quando dizemos que A e B são equivalentes. É fácil verificar que \equiv é uma relação de equivalência no conjunto das fórmulas da lógica proposicional.

Note que \equiv é um símbolo *metalinguístico*, e não um símbolo da lógica proposicional. Não confundir, portanto, com a notação $A \leftrightarrow B$, que representa uma fórmula (omitindo os parênteses externos – é normal na notação omitirmos parênteses que, apesar de constarem nas regras, não comprometem a unicidade de representação caso sejam omitidos). Por exemplo: está errado dizer “Concluimos que $A \leftrightarrow B$ ”, pois falta um verbo nessa segunda oração. Devemos, em vez disso, dizer “Concluimos que $A \equiv B$ ”, ou “Concluimos que $A \leftrightarrow B$ é uma tautologia”.

Citaremos a seguir algumas equivalências importantes, que mostram como podemos definir alguns conectivos a partir de outros. Essas equivalências podem ser facilmente verificadas via tabela verdade. As duas primeiras equivalências são conhecidas como *leis de De Morgan*. Omitimos alguns parênteses para facilitar a escrita.

- $A \wedge B \equiv \neg((\neg A) \vee (\neg B))$;
- $A \vee B \equiv \neg((\neg A) \wedge (\neg B))$;
- $A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B$;
- $A \vee B \equiv (\neg A) \rightarrow B$;
- $A \leftrightarrow B \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Aplicando essas equivalências recursivamente através das subfórmulas, temos o seguinte resultado: toda fórmula é equivalente a alguma fórmula que só possui, como conectivos, \neg e \vee . De fato, basta usar a primeira, terceira e quinta equivalência para substituir todos os conectivos \wedge , \rightarrow e \leftrightarrow usando apenas \neg e \vee . Usando as outras equivalências podemos, provamos também que podemos reduzir aos conectivos \neg e \wedge ou também aos conectivos \neg e \rightarrow . No entanto, como vocês podem ver na primeira lista de exercícios, não é possível suprimir o conectivo \neg nem reduzir apenas aos conectivos \neg e \leftrightarrow .

Uma pergunta que podemos fazer nesse aspecto é: seria possível definir outros conectivos (sejam unários, binários ou com mais de dois parâmetros) que não são possíveis definir a partir dos conectivos que estabelecemos? Em outras palavras: temos a maior expressividade possível com os conectivos que definimos? Essa pergunta, claro, precisa de melhor formalização (que iremos ver mais pra frente usando lógica de primeira ordem). Mas mostraremos que podemos, de certo modo, “inverter” o processo da tabela verdade, criando uma fórmula a partir de uma quantidade finita de variáveis proposicionais decidindo se linha da tabela verdade deverá ser verdadeira ou falsa. Além disso, a fórmula que criaremos segue um formato específico, que torna muito fácil a verificação de sua tabela verdade, conforme a seguinte definição:

Definição 3 (Forma disjuntiva normal) Dizemos que uma fórmula A é *disjuntiva normal* (alternativamente, está na *forma disjuntiva normal*) se satisfaz as seguintes condições:

1. A não possui outros conectivos além de \neg , \wedge e \vee ;
2. Se $B \wedge C$ é subfórmula de A , então B e C não possuem o conectivo \vee ;
3. Se $\neg B$ é subfórmula de A , então B é atômica.

Ou seja, as fórmulas na forma disjuntiva normal são da forma $A_1 \vee \dots \vee A_n$, onde cada A_i é da forma $B_1 \wedge \dots \wedge B_m$, onde cada B_i é uma fórmula atômica ou sua negação.

Teorema 4 *Sejam p_{k_1}, \dots, p_{k_n} fórmulas atômicas e seja X um conjunto de funções de $\{p_{k_1}, \dots, p_{k_n}\}$ em $\{0, 1\}$. Então existe uma fórmula A na forma disjuntiva normal tal que A é verdadeira para uma valoração V se, e somente se, a restrição de V a essas fórmulas atômicas pertence a X . Isto é, se existe f em X tal que $f(p_{k_i}) = V(p_{k_i})$, para todo i entre 1 e n .*

Demonstração: Se X for vazio, tomemos A a fórmula $p \wedge \neg p$. Suponhamos X não vazio e escrevamos $X = \{f_1, \dots, f_m\}$. Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$ definimos $A_j = B_j^1 \wedge \dots \wedge B_j^n$, onde cada B_j^i é p_{k_i} , se $f_j(p_{k_i}) = 1$, e $\neg p_{k_i}$, se $f_j(p_{k_i}) = 0$. Defina A como a fórmula $A_1 \vee \dots \vee A_m$.

Suponhamos que $V(A) = 1$, para uma valoração V . Isso significa que $V(A_j) = 1$, para algum j , o que implica que $V(B_j^i) = 1$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Quando $f_j(p_{k_i}) = 1$, temos que B_j^i é p_{k_i} e, portanto, $V(p_{k_i}) = 1$. Quando $f_j(p_{k_i}) = 0$, temos que B_j^i é $\neg p_{k_i}$ e, portanto, $V(p_{k_i}) = 0$.

Reciprocamente, se $V(p_{k_i}) = f_j(p_{k_i})$, para algum $j \in \{1, \dots, m\}$ e todo $i \in \{1, \dots, n\}$, temos, pelo mesmo argumento, $V(B_j^i) = 1$ e, portanto, $V(A) = 1$, como queríamos provar. \square

Observe que a demonstração acima formaliza o processo que descrevemos anteriormente para obtermos uma fórmula disjuntiva normal a partir da tabela verdade. As funções pertencentes a X representam as linhas em que a fórmula é marcada como verdadeira.

Como conseguimos uma fórmula disjuntiva normal para cada tabela verdade, então, dada uma fórmula qualquer, obtemos outra, na forma disjuntiva normal, que possui a mesma tabela verdade.

Corolário 5 *Toda fórmula proposicional é equivalente a alguma fórmula na forma disjuntiva normal.*

Demonstração: Seja B uma fórmula e tome F o conjunto das subfórmulas atômicas de B . Defina

$$X = \{V|_F : V \text{ é valoração e } V(B) = 1\},$$

lembrando que $V|_F$ denota a função de F em $\{0, 1\}$ dada pela restrição de V a F . Pelo Teorema 4 existe uma fórmula A na forma disjuntiva normal tal que, para toda valoração V , temos $V(A) = 1$ se, e somente se, $V|_F \in X$.

Seja V uma valoração. Vamos mostrar que $V(A) = V(B)$. Para isso, mostraremos que $V(B) = 1$ se, e somente se, $V(A) = 1$. Suponha que $V(B) = 1$. Temos, por

definição de X , que $V|_F \in X$. Logo, $V(A) = 1$, por definição de A . Reciprocamente, suponha que $V(A) = 1$. Temos $V|_F \in X$. Isso significa que existe uma valoração V' tal que $V'(B) = 1$ e $V'|_F = V|_F$. Como F é o conjunto das subfórmulas atômicas de B , do Teorema 2 segue que $V(B) = V'(B) = 1$. \square

Observação sobre a nomenclatura. Quando trabalhamos com álgebras de Lindenbaum, consideramos, no lugar do conjunto das fórmulas da linguagem da lógica proposicional, o conjunto das classes de equivalência das fórmulas, dada pela relação de equivalência usual entre fórmulas. Nessa abordagem, indentificamos fórmulas equivalentes como *iguais*. Por isso, quando dizemos que uma fórmula *está na forma disjuntiva normal* estamos dizendo que aquela, na verdade, é uma representação na forma disjuntiva normal daquela classe de equivalência. Por exemplo, do ponto de vista de álgebras de Lindenbaum, as fórmulas $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$ são a mesma, porque são equivalentes. Então dizemos que $((\neg p) \wedge q) \vee (p \wedge (\neg q))$ é uma *representação na forma disjuntiva normal* da fórmula $\neg(p \leftrightarrow q)$.