

Definição recursiva de subfórmulas

Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Na Lógica frequentemente usamos definições recursivas sobre a complexidade das fórmulas e poucas vezes formalizamos com o rigor adequado. Na própria definição de fórmula usamos esse tipo de recorrência, quando escrevemos frases como “se A é uma fórmula, então $\neg A$ é uma fórmula”. Definições por recursão são comuns também na Teoria dos Conjuntos e em diversas áreas da Matemática, sempre exigindo uma formalização que possui uma certa dificuldade técnica que costuma ser omitida em cursos básicos e em livros didáticos. Na seção 4.7 de <https://www.ime.usp.br/fajardo/Conjuntos.pdf> encontra-se a demonstração do Teorema da Recursão para funções definidas no conjunto dos números reais, e é esse teorema que servirá de inspiração para o que será apresentado neste texto.

O propósito deste texto é formalizar melhor os conceitos de fórmula e subfórmula, oferecendo uma definição rigorosa e provando propriedades como: “Se B é subfórmula de $\neg A$, então B é a própria $\neg A$ ou é subfórmula de A ”. Embora isso é apresentado frequentemente como parte da definição de subfórmula, tal definição requer usa de uma variação do Teorema da Recursão, além de depender fortemente do princípio de indução na complexidade da fórmula e do teorema da unicidade de representação.

Aqui será desenvolvida as definições de fórmula e subfórmulas na lógica proposicional, mas uma abordagem análoga funciona sem maiores dificuldades para termos e fórmulas (e subtermos e subfórmulas) de linguagens de lógica de primeira ordem.

1 Linguagem da Lógica Proposicional

Seja A o alfabeto da linguagem da lógica proposicional. A saber, $A = \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\wedge, \neg, (,)\}$. Consideraremos os outros conectivos ($\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) como abreviaturas e não pertencentes ao alfabeto original. Note que o conjunto A é enumerável e, se quisermos, podemos considerar formalmente A como sendo o próprio conjunto \mathbb{N} , identificando \wedge, \neg e os parênteses com os números 0, 1, 2 e 3 e a variável proposicional p_n com o número $n-4$. Isso é importante caso queiramos tratar a lógica proposicional inteiramente dentro da teoria axiomática dos conjuntos, onde precisaríamos explicar o que significa “símbolos”, visto como conjunto.

Se X e Y são conjuntos, denotamos por ${}^Y X$ o conjunto das funções de Y em X . Usamos essa notação em vez da tradicional X^Y para não confundir com a exponencial, quando X e Y forem números ou cardinais. Por exemplo, 2^3 é o número 8, enquanto que 3^2 é o conjunto das funções de $\{0, 1, 2\}$ em $\{0, 1\}$, lembrando que, na construção construtivista de \mathbb{N} , temos que $n = \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (isto é, cada número natural é o conjunto dos seus antecessores). Isto é, $n = \{0, \dots, n-1\}$.

Definimos $S = \cup\{^n A : n \in \mathbb{N}^*\}$ o conjunto das *strings* da lógica proposicional.

Se f e g são dois elementos de S , denotamos por fg a *concomitação de f e g* , definida como $f \cup \{(dom(f) + m, a) : (m, a) \in g\}$. Note que, se $f, g \in S$, então $fg \in S$.

Por abuso de notação, se $a \in A$ denotaremos a string $\{(0, a)\}$ (isto é, a sequência unitária a) pelo mesmo símbolo a .

Tome \mathcal{F} o conjunto de todos os subconjuntos $X \subset S$ tais que

1. $p_n \in X$;
2. se $A \in X$ então $(\neg A) \in X$;
3. se $\{A, B\} \subset X$ então $(A \wedge B) \in X$.

Note que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pois, claramente, $S \in \mathcal{F}$. Definimos o *conjunto de fórmulas da lógica proposicional* como

$$L := \bigcap \mathcal{F}.$$

Lembrando que a notação metalinguística $:=$ significa que essa igualdade está sendo usada para definir o termo da esquerda (ou seja, a letra L para o conjunto das fórmulas da lógica proposicional).

É fácil verificar que:

Proposição 1 *Sendo L e \mathcal{F} como acima temos:*

- (a) $L \in \mathcal{F}$;
- (b) Se $X \in \mathcal{F}$ então $L \subset X$.

A parte (b) da Proposição 1 é uma forma do princípio de indução na complexidade da fórmula.

Como $L \in \mathcal{F}$, as strings unitárias da forma p_n são fórmulas, e passaremos a chamá-las de *fórmulas atômicas*.

Contrariando o que costumamos fazer na disciplina de lógica, aqui os símbolos $=$ e \neq , da metalinguagem, podem ser usados entre fórmulas, o que não gera ambiguidade, pois tais símbolos não pertencem ao alfabeto da lógica proposicional.

Agora definamos o grau de complexidade da fórmula.

Seja \mathcal{G} o conjunto de todas as relações $R \subset L \times \mathbb{N}$ que satisfazem as seguintes condições:

1. Se A é fórmula atômica, $(A, 0) \in R$;
2. Se $(A, n) \in R$ então $((\neg A), n + 1) \in R$;
3. Se $(A, n) \in R$ e $(B, m) \in R$ então $((A \wedge B), \max\{m, n\} + 1) \in R$.

Note que $L \times \mathbb{N} \in \mathcal{G}$, de modo que esse conjunto é não vazio e podemos tomar a intersecção. Defina

$$gr = \bigcap \mathcal{G}$$

Proposição 2 *Seja gr e \mathcal{G} como acima temos:*

- (a) $gr \in \mathcal{G}$;
- (b) gr é uma função.

Demonstração: A verificação da parte (a) é imediata. Provaremos a parte B. Seja X o conjunto das fórmulas $A \in L$ tais que existe um único $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $(A, n) \in gr$. Para provar que gr é uma função é suficiente provar que $X = L$ e, pelo item (b) da Proposição 1, é suficiente provar que $X \in \mathcal{F}$.

Primeiro provemos que, se A é fórmula atômica, então $A \in X$. De fato, já temos que $(A, 0) \in gr$ e precisamos provar que, se $n \neq 0$, $(A, n) \notin gr$. Seja $n \neq 0$ e tome $R = gr \setminus \{(A, n)\}$. Trivialmente, $R \in \mathcal{G}$ e, portanto, $gr \subset R$, o que implica que $(A, n) \notin gr$ e $A \in X$.

Suponha que $A \in X$ e seja n o único natural tal que $(A, n) \in gr$. Pela condição 2 da definição de \mathcal{G} e pelo item (a) temos $((\neg A), n + 1) \in gr$. Agora vejamos que $n + 1$ é único. Seja $m \neq n + 1$ e considere $R = gr \setminus \{((\neg A), m)\}$. Pela unicidade da representação da fórmula, temos que as condições 1 e 3 continuam satisfeitas para R , visto que o único par que retiramos de gr não é da forma $((A \wedge B), k)$ nem da forma $(p_n, 0)$. Para a condição 2, seja $(B, k) \in R$. Novamente pelo teorema da unicidade da representação da fórmula, se $B \neq A$ temos $(\neg B) \neq (\neg A)$ e, portanto, 2 é preservada. Se $B = A$, pela hipótese de que $A \in X$ temos que $k = n$ e, como $m \neq n + 1$, temos $((\neg A), n + 1) \in R$. Logo, $(\neg A) \in X$.

A prova de que $A \in X$ e $B \in X$ implicam $(A \wedge B) \in X$ é análoga. ■

2 Definindo subfórmulas

Denotaremos por $Subf(A)$ o conjunto das subfórmulas de A . Ou seja, $Subf$ será uma função de L em $\mathcal{P}(L)$. O seguinte teorema é uma possível definição recursiva de subfórmulas, e provar esse teorema significa provar que tal definição é boa.

Teorema 3 *Existe uma única função $Subf : L \rightarrow \mathcal{P}(L)$ tal que, para todas fórmulas A e B :*

- (a) *Se A é atômica, $Subf(A) = \{A\}$;*
- (b) *$Subf((\neg A)) = \{(\neg A)\} \cup Subf(A)$;*
- (c) *$Subf((A \wedge B)) = \{(A \wedge B)\} \cup Subf(A) \cup Subf(B)$.*

Esta seção será dedicada a provar esse teorema. A parte da unicidade é mais simples. De fato, se tivermos duas funções $Subf$ e $Subf'$ satisfazendo as condições acima, é fácil verificar que o conjunto $\{A \in L : Subf(A) = Subf'(A)\}$ pertence a \mathcal{F} e, portanto, pela Proposição 1, item (b), contém L . A parte da existência é que dá mais trabalho. A ideia é a mesma das proposições 1 e 2, mas apresenta uma dificuldade técnica significativamente maior.

Defina \mathcal{S} o conjunto de todas as relações $R \subset L^2$ tais que, para todas fórmulas A, B e C :

1. $(A, A) \in R$;
2. $((\neg A), A) \in R$;
3. $((A \wedge B), A) \in R$;
4. $((A \wedge B), B) \in R$;
5. se $(A, C) \in R$ e $(C, B) \in R$, então $(A, B) \in R$.

Temos $L^2 \in \mathcal{S}$ e, portanto, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Defina

$$S := \bigcap \mathcal{S}.$$

Lema 4 $S \in \mathcal{S}$.

Demonstração: A verificação é imediata e será deixada como exercício. ■

Lema 5 Se $(A, B) \in S$, então $gr(B) < gr(A)$ ou $A = B$.

Demonstração: Tome $R = S \setminus \{(A, B) \in S : gr(B) \geq gr(A) \text{ e } A \neq B\}$. Para provar o lema será suficiente provar que $R \in \mathcal{S}$, pois, como $S = \bigcap \mathcal{S}$, teremos $S \subset R$ e, portanto, o conjunto $\{(A, B) \in S : gr(B) \geq gr(A) \text{ e } A \neq B\}$ será vazio, e isso é exatamente o que o lema diz.

Note que os pares da forma (A, A) , $((\neg A), A)$, $((A \wedge B), A)$ e $((A \wedge B), B)$ não pertencem ao conjunto $\{(A, B) \in S : gr(B) \geq gr(A) \text{ e } A \neq B\}$. Portanto, o fato de S satisfazer as condições 1 a 4 da definição de \mathcal{S} implica que R também satisfaz. Precisamos verificar a condição 5.

Sejam A, B, C fórmulas tais que $(A, C), (C, B) \in R$. Se $A = C$ ou $C = B$ temos $(C, B) = (A, B)$ ou $(A, C) = (A, B)$, resultando, em ambos os casos, que $(A, B) \in R$. Se $A \neq C$ e $C \neq B$, pela definição de R temos $gr(A) > gr(C) > gr(B)$. Como $R \subset S$ e $S \in \mathcal{S}$, pela condição 5 temos $(A, B) \in S$. Mas, como $gr(A) > gr(B)$, temos $(A, B) \in R$, como queríamos. ■

Corolário 6 Se A é atômica, então $(A, B) \in S$ se, e somente se, $A = B$.

Demonstração: Imediato do Lema 5 e do fato de que as fórmulas atômicas têm grau de complexidade 0. ■

Lema 7 Suponha que $(A, F) \in S$ e que B e C são fórmulas. Temos:

- (a) Se $A = (\neg B)$, então $F = A$ ou $(B, F) \in S$;
- (b) Se $A = (B \wedge C)$, então $F = A$, ou $(B, F) \in S$ ou $(C, F) \in S$.

Demonstração: Provaremos por indução em $n = gr(A) - gr(F)$, lembrando que, pelo Lema 5, $n \geq 0$. Se $n = 0$, pelo Lema 5 temos $A = F$ e (a) e (b) valem trivialmente. Suponha que o lema é verdadeiro quando $gr(A) - gr(F) \leq n$. Sejam $A, F \in L$ tais que $gr(A) - gr(F) = n + 1$ e suponha que um dos itens (a) ou (b) seja falso. Sem perda de generalidade, assumimos (b) falso e escrevemos $A = (B \wedge C)$. Mostraremos que $R = S \setminus \{(A, F)\} \in \mathcal{S}$, contradizendo com a hipótese de que $(A, F) \in S$.

Como $gr(A) > gr(F)$, temos $F \neq A$ e, portanto, a condição 1 é preservada em R . Isto é, já sabemos que S satisfaz a condição 1, por pertencer a \mathcal{F} , e, por (A, F) não ser da forma da condição 1, temos que R também satisfaz 1. Pelo teorema da unicidade de representação das fórmulas e a hipótese de que $F \notin \{B, C\}$ (pois assumimos (b) falso), temos que as condições 2, 3 e 4 também são preservadas. Mostraremos que R satisfaz 5. Para isso, sabendo que S satisfaz tal condição, basta mostrarmos que não existe $D \in L$ tal que $(A, D) \in R$ e $(D, F) \in R$. Suponha, por absurdo, que existe tal D . Como $D \neq A$ e $D \neq F$ (pois $(A, F) \notin R$), temos, pelo Lema 5, que $gr(A) > gr(D) > gr(F)$. Logo, $gr(A) - gr(D) \leq n$ e, pela hipótese de indução, $(B, D) \in S$ ou $(C, D) \in S$. Suponha, sem perda de generalidade, $(B, D) \in S$. Mas da hipótese $(D, F) \in R \subset S$ e da condição 5 satisfeita por S temos $(B, F) \in S$, contradizendo a falsidade de (b). ■

Definição 8 Definimos $Subf : L \rightarrow \mathcal{P}(L)$ a função dada por $Subf(A) = \{B \in L : (A, B) \in S\}$.

Provaremos que $Subf$ satisfaz as condições do Teorema 3. A condição (a) é consequência direta do Corolário 6. Mostraremos o item (c), sendo que o mesmo argumento se aplica a (b). Seja $A = (B \wedge C)$ e provaremos que $Subf(A) = \{A\} \cup Subf(B) \cup Subf(C)$.

Para a primeira inclusão, tome $F \in Subf(A)$. Isto é, $(A, F) \in S$. Pelo Lema 7 temos $F = A$, ou $(B, F) \in S$ ou $(C, F) \in S$, o que implica, respectivamente, $F \in \{A\}$, $F \in Subf(B)$ ou $F \in Subf(C)$.

Mostremos a segunda inclusão. Seja $F \in \{A\} \cup Subf(B) \cup Subf(C)$. Se $F = A$, pela condição 1 de \mathcal{S} temos $(A, A) \in S$ e, portanto, $F \in Subf(A)$. Se $F \in Subf(B)$, isso significa que $(B, F) \in S$. Pela condição 3 temos $(A, B) \in S$ e, por 5, $(A, F) \in S$, concluindo que $F \in Subf(A)$. Analogamente, se $F \in Subf(C)$ as condições 3 e 5 implicam $F \in Subf(A)$, provando o teorema.