MAT 359/6601 – Lógica/Introdução à Lógica Matemática – 1ª Prova

1. (2 pontos) Verifique se cada uma das fórmulas abaixo é uma tautologia, contradição ou contingência. Justifique.

(a) $(((\neg(p \wedge q)) \rightarrow r) \wedge (\neg(p \rightarrow (q \vee r))))$;

(b) $p_1 \wedge (p_2 \rightarrow (p_3 \vee (\neg p_4)))$;

(c) $(p_1 \leftrightarrow (\neg p_2)) \rightarrow (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow (p_4 \rightarrow (p_5 \wedge p_6)))))$;

(d) $(p_1 \wedge p_2) \leftrightarrow ((p_3 \wedge p_4) \rightarrow (p_5 \vee (\neg p_1)))$.

2. (2 pontos) Considere A a fórmula $(((\neg(p \leftrightarrow q)) \rightarrow r) \wedge (\neg(p \rightarrow (q \wedge r))))$

(a) Calcule o grau de complexidade de A e exiba todas as suas subfórmulas;

(b) Encontre uma fórmula equivalente a A que contenha apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$;

(c) Encontre uma fórmula equivalente a A na forma disjuntiva normal;

(d) Encontre uma fórmula B equivalente a $(\neg A)$ de modo que para toda subfórmula de B da forma $(\neg C)$, C é atômica.

3. (2 pontos) Considerando as regras de formação de fórmula estritamente, sem omissão de parênteses, prove, por indução na complexidade da fórmula, a seguinte afirmação:

> O número de símbolos de uma fórmula é ímpar se, e somente se, o número de símbolos de negação nessa mesma fórmula é par.

4. (2 pontos) Sejam p uma fórmula atômica e A uma fórmula que não possui p como subfórmula. Prove que $p \leftrightarrow A$ é uma contingência.

5. (3 pontos) Sejam p e q duas variáveis proposicionais distintas e considere X o conjunto de todas as fórmulas da lógica proposicional que não possuem outras subfórmulas atômicas além de p e q. Calcule a cardinalidade de $X/\equiv$, isto é, o número de classes de equivalência de X pela relação de equivalência usual entre fórmulas. Justifique e explique intuitivamente esse resultado. Obtenha uma generalização para quando X é o conjunto das fórmulas compostas a partir de n variáveis proposicionais.