

## MAT 359/6601 – Lógica – 2ª Lista de exercícios

**1.** Seja  $\mathbf{N}$  a linguagem da aritmética, com as constantes 0 e 1, os símbolos funcionais binários  $+$  e  $\times$  e o símbolo relacional binário  $<$ . Escreva as seguintes frases na linguagem  $\mathbf{N}$ .

- a) Todo número par maior do que dois pode ser escrito como soma de dois números primos.
- b)  $x$  possui exatamente três divisores.
- c) Todo número é menor que um quadrado perfeito.
- d)  $x$  e  $y$  são primos entre si.
- e) 2 é o máximo divisor comum de  $x$  e  $y$ .

**2.** Considere a  $\mathbf{TC}$  a linguagem da teoria dos conjuntos, com o símbolo relacional binário  $\in$  como único símbolo específico da linguagem. Transcreva cada uma das frases abaixo para a linguagem  $\mathbf{TC}$ .

- (a) Existe um único conjunto vazio;
- (b) Para todo  $x$  não vazio, existe  $y$  pertencente a  $x$  tal que a intersecção de  $x$  e  $y$  é vazia;
- (c)  $x$  é o conjunto  $\{y, z\}$ ;
- (d)  $x$  tem no máximo três elementos;
- (e) Dois conjuntos são iguais se, e somente se, eles possuem os mesmos elementos.

**3.** Para cada uma das frases abaixo, defina uma linguagem de primeira ordem apropriada – introduzindo constantes, símbolos funcionais e relacionais – e escreva a frase nessa linguagem. Diga qual conjunto universo você está utilizando (preste atenção, pois, em alguns casos, o universo pode ser formado por mais de uma categoria de objetos – você pode usar símbolos relacionais unários para diferenciar os tipos de objetos).

- (a) Todo elemento da ordem parcial  $P$  está abaixo de algum elemento maximal, mas  $P$  não possui máximo.

- (b) Para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todos  $x$  e  $y$  pertencentes ao domínio da  $f$ , se  $|x - y| < \delta$  então  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .
- (c)  $x$  é o menor número real que é maior ou igual a todos os elementos do conjunto  $S$ .
- (d) O conjunto dos números naturais é ilimitado no conjunto dos números reais.
- (e) Dados dois pontos distintos existe uma única reta que passa por esses dois pontos.
- (f) Dados uma reta e um ponto fora dessa reta, existe uma única reta que passa por esse ponto e é paralela à reta dada.

4. Considere as seguintes fórmulas:

- (a)  $\forall x((x + 1 = 0) \wedge ((-y) < 0)) \rightarrow (x < y + 2)$ ;
- (b)  $\forall x(((x + 1 = 0) \wedge ((-y) < 0))) \rightarrow (x < y + 2)$ ;
- (c)  $(\omega \cup \emptyset) \in \bigcup(\bigcup(\mathcal{P}(\omega \times x)))$ ;
- (d)  $(0 \in \omega) \wedge \forall x((x \in \omega) \rightarrow (s(x) \in \omega)) \wedge \forall y(((0 \in y) \wedge ((x \in y) \rightarrow (s(x) \in y))) \rightarrow (\omega \subset y))$ ;
- (e)  $(\neg \forall y \neg (x + y < z)) \leftrightarrow (\exists y (x + y < z))$ .

Para cada uma das fórmulas do item acima resolva os seguintes exercícios:

- (i) Determine que tipo de símbolo é cada um dos símbolos específicos da linguagem (constante, funcional  $n$ -ário, ou relacional  $n$ -ário, especificando o número  $n$ );
- (ii) Calcule o grau de complexidade da fórmula e encontre todas as suas subfórmulas;
- (iii) Encontre todos os termos que ocorrem na fórmula, calcule seus graus de complexidade e encontre os subtermos;
- (iv) Marque as ocorrências livres e ligadas das variáveis.
- (v) Escreva a fórmula  $[A]_x^{(y+1)}$ , sendo  $A$  a fórmula do item correspondente.