MAT 359/6601 – Lógica – 1ª Lista de exercícios

1. Verifique se cada uma das seguintes sequências de símbolos é uma fórmula, justificando a partir da definição.

(a) $(p_1 \to (p_2 \wedge p_3)$

(b) $(p_1 \to (p_2 \wedge p_3))$

(c) $(p_1 \neg p_2)$

(d) $(p_1 \to p_2 \to p_3)$

(e) $((p_1 \vee (\neg p_2)) \wedge ((\neg p_1) \vee p_2))$

2. Prove, por indução na complexidade da fórmula, que em qualquer fórmula da linguagem proposicional existe o mesmo número de parênteses esquerdos e direitos.

3. Prove que o teorema da unicidade de representação das fórmulas seria falso se usássemos a mesma definição de fórmulas mas sem usar parênteses.

4. Verifique se cada uma das fórmulas abaixo é uma tautologia, contradição ou contingência. Justifique.

(a) $p_1 \to (p_2 \wedge (p_3 \leftrightarrow (p_4 \vee ((\neg p_1) \to (p_5 \vee p_6)))))$

(b) $p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to (p_4 \to (p_5 \to p_1))))$

(c) $p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to (p_4 \to (p_5 \to (\neg p_1)))))$

(d) $p_1 \leftrightarrow (p_2 \leftrightarrow (p_3 \leftrightarrow (p_4 \leftrightarrow (p_5 \leftrightarrow (\neg p_1)))))$

(e) $(p_1 \to (p_2 \to (p_3 \to (p_4 \to p_1)))) \to (p_5 \leftrightarrow (\neg p_5))$

5. Calcule o grau da complexidade de cada fórmula do exercício anterior. Justifique pela definição.

6. Encontre uma fórmula equivalente à fórmula do item (a) do exercício 4 contendo apenas $\neg$ e $\to$ como conectivos.

7. Escreva uma fórmula equivalente à negação de cada uma das fórmulas do exercício 4, de modo que essa não contenha subfórmula da forma $(\neg A)$ para A não atômica.

8. (Conectivo de Sheffer) Defina um conectivo binário $|$ através da seguinte tabela-verdade:

p	q	$p\vert q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

(a) Defina $|$ a partir dos conectivos usuais;

(b) Mostre que a partir de $|$ é possível definir qualquer conectivo;

(c) Defina um conectivo binário diferente do conectivo de Sheffer (isto é, não equivalente a esse) a partir do qual é possível definir qualquer conectivo;

(d) Prove que esses dois são os únicos conectivos possíveis com essa característica.

9. Prove que não é possível definir $\neg$ a partir dos outros conectivos usuais.

Dica: Seja V a valoração tal que $V(p) = 1$, para toda fórmula atômica p (lembre-se de argumentar por que essa valoração existe). Prove, por indução na complexidade da fórmula, que $V(A) = 1$, para toda fórmula A que não contém $\neg$. Justifique por que isso é suficiente para resolver o exercício.

10. Prove que não existe uma fórmula equivalente a $p \wedge q$ que contenha apenas os conectivos $\neg$ e $\leftrightarrow$ (em particular, não é possível definir os outros conectivos a partir desses dois).

Dica: Siga o seguinte roteiro, usando indução na complexidade da fórmula sempre que necessário.:

1. Dadas uma fórmula A, uma variável proposicional p e uma fórmula B, definimos recursivamente $A[p|B]$ da seguinte forma: se A é atômica e diferente de p, então $A[p|B]$ é A. Se A é p então $A[p|B]$ é B. Se A é $(\neg C)$ então $A[p|B]$ é $(\neg C[p|B])$. Se A é $C \wedge D$ então $A[p|B]$ é $(C[p|B] \wedge D[p|B])$, e assim, analogamente, para os outros conectivos. Prove que $A[p|B]$ é uma fórmula.

2. Prove que, see $V(p) = V(q)$, então $V(A) = V(A[p|q])$.

3. Prove que, se A e B são equivalentes e q é uma variável proposicional que não é subfórmula de B, então $A[q|p]$ também é equivalente a B.

4. Usando os itens anteriores, prove que, se existe uma fórmula A equivalente a $p \wedge q$ e contendo apenas os conectivos $\neg$ e $\leftrightarrow$, podemos assumir que A não contém subfórmula atômica diferente de p e de q.

5. Defina, para cada fórmula B, $X_B = \{V|_{\{p,q\}} : V$ é uma valoração tal que $V(B) = 1\}$. Prove que, para qualquer fórmula B que contenha no máximo p e q como subfórmulas atômicas, temos $V(B) = 1$ se, e somente se, $V|_{\{p,q\}} \in X_B$.

6. Usando o item anterior, sendo X o conjunto de todas as funções de $\{p, q\}$ em $\{0, 1\}$ e A e B fórmulas contendo apenas as variáveis proposicionais p e q, temos que
$$X_{\neg A} = X \setminus X_A$$
e
$$X_{A \leftrightarrow B} = (X_A \cap X_B) \cup ((X \setminus X_A) \cap (X \setminus X_B))$$

7. Prove que os conjuntos acima têm números pares de elementos, quando X_A e X_B também têm. Usando isso prove, por indução, que, se A é construída apenas com os conectivos $\neg$ e $\leftrightarrow$, e possui no máximo p e q como subfórmulas atômicas, então X_A tem 0, 2 ou 4 elementos, não podendo ser igual a $X_{p \wedge q}$, que é unitário.