MAT359 – Lógica – Lista 0

Esta lista pretende levar os estudantes a refletirem sobre noções intuitivas ligadas à lógica que serão formalizadas com mais rigor durante a disciplina.

1. Decida quais dos argumentos abaixo são válidos.

a) Todos os girassóis são amarelos e alguns pássaros são amarelos. Logo, nenhum pássaro é um girassol.

b) Alguns livros são verdes e algumas coisas verdes são comestíveis. Concluímos que alguns livros são comestíveis.

c) Algumas flores são azuis e todas as coisas azuis são comestíveis. Concluímos que algumas flores são comestíveis.

d) Como todos os peixes são mamíferos, todos os mamíferos são aves e existem minerais que são peixes, concluímos que existem minerais que são aves.

2. (Stewart, I. *Almanaque das curiosidades matemáticas*):

Nenhum gato fantasiado de garça é antissocial.
Nenhum gato sem rabo brinca com gorilas.
Gatos com bigodes sempre se fantasiam de garça.
Nenhum gato sociável tem garras rombudas.
Nenhum gato tem rabo, a menos que tenha bigodes.

Portanto:

Nenhum gato com garras rombudas brinca com gorilas.

A dedução é logicamente correta?

3. No início de um julgamento o réu declarou ao juiz: "Se estou falando a verdade, então sou inocente."

a) Se assumirmos que essa afirmação deverá ser verdadeira ou falsa, e não ambas, o que podemos concluir sobre a culpa do réu? Justifique.

b) Discorra sobre o significado prático da resolução do item anterior. A conclusão parece absurda? Qual é o erro do raciocínio?

4. Reescreva cada uma da frases a seguir de uma maneira precisa e livre de ambiguidade, assumindo como conceitos matemáticos primitivos apenas os seguintes: o número 0, o número 1, a soma, o produto, a relação de ordem, a relação de pertinência, o conjunto dos números naturais.

a) A soma de um número par e de um número ímpar é ímpar;

b) Existe um único conjunto vazio;

c) Todo número natural é menor que algum número primo;

d) Dados dois conjuntos x e y existe um único conjunto cujos únicos elementos são x e y.

e) x e y são primos entre si;

f) Para todo conjunto x existe o conjunto dos subconjuntos de x;

g) O menor divisor comum entre x e y é 2;

h) Todo conjunto não-vazio é disjunto de algum dos seus elementos;

i) Todo número par maior do que 2 se escreve como soma de dois números primos;

j) Existe um conjunto que possui o conjunto vazio como elemento e tal que, sempre que x pertence a esse conjunto, $x \cup \{x\}$ também pertence.

5. Repita o exercício anterior, mas, desta vez, use apenas os seguintes símbolos matemáticos, além dos delimitadores (parênteses e vírgula) e variáveis (representadas por letras minúsculas, como x, y, z):

$\neg$ (não);

$\wedge$ (e);

$\vee$ (ou);

$\rightarrow$ (se ..., então);

$\leftrightarrow$ (se, e somente se);

$\forall$ (para todo);

$\exists$ (existe);

$=$ (igualdade);

$\mathbb{N}$ (o conjunto dos números naturais);

0 (o número natural zero);

1 (o número natural um);

$<$ (menor que);

$+$ (soma);

$\cdot$ (produto);

$\in$ (pertence).

6. Considere a linguagem do exercício anterior, adicionando todos os numerais (0, 1, 2, 3, etc.) como símbolos primitivos da linguagem. Supondo que o universo seja dos números naturais, diga para quais valores de x, y e z a fórmula é verdadeira. Preste atenção na distribuição dos parênteses.

a) $x \cdot y = 8$;

b) $(\exists z(x + z = y))$;

c) $(\exists z(x + z = y)) \wedge (z + z = z \cdot z)$;

d) $\exists z((x + z = y) \wedge (z + z = z \cdot z))$;

e) $(\exists z(x + z = y)) \wedge (\exists z(z + z = z \cdot z))$;

f) $(\exists z(x + z = y)) \wedge (\forall z(z + z = z \cdot z))$;

g) $\exists z((x \cdot z = y) \wedge (y < 10) \wedge (0 < y) \wedge (2 < z))$;

h) $(\exists z(x \cdot z = y)) \wedge (y < 10) \wedge (0 < y) \wedge (2 < z)$;

i) $(4 < x + z) \rightarrow (\forall x \exists z(x \cdot z = y))$;

j) $\forall x((\neg(x + x = y)) \rightarrow (\neg(x \cdot x = y)))$;

k) $(\forall x \neg(x + x = y)) \rightarrow (\forall x \neg(x \cdot x = y))$;

7. Sejam A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K os subconjuntos de $\mathbb{N}^3$ correspondentes às triplas ordenadas (x, y, z) que satisfazem a fórmula dos itens a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k do exercício anterior, respectivamente. Verifique se as seguintes relações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta. Nos casos em que for falso, mostre explicitamente uma tripla ordenada que testemunha isso.

a) $A \cap B = \emptyset$;

b) $B \subset C$;

c) $C \subset B$;

d) $D \subset E$;

e) $E \subset D$;

f) $G \subset H$;

g) $H \subset G$;

h) $A \cap I = F$;

i) $I \subset H$;

j) $H \cap I = \emptyset$;

k) $J \subset K$;

l) $K \subset J$;

m) $A \cap J = \emptyset$;

n) $A \cap K = \emptyset$.