Matemática na Educação Básica

6º Trabalho em grupo

O *Princípio de Cavalieri* afirma o seguinte: dados um plano P e dois sólidos A e B, se, para todo plano Q igual ou paralelo a P, as regiões $Q \cap A$ e $Q \cap B$ possuem a mesma área, então A e B possuem o mesmo volume.

Usaremos o fato que um paralelepípedo retângulo possui volume igual ao produto das medidas das arestas. Também assumiremos, desta vez com menos formalismo, propriedades semelhantes às usadas no 5º Trabalho em Grupo (no lugar de "segmentos têm área zero" temos que "regiões limitadas do plano têm volume zero", e no lugar de "um quadrado de lado 1 tem área 1" usaremos que "um cubo de aresta 1 tem volume 1"),

As definições das figuras aqui mencionadas serão discutidas em sala.

Com base nesse princípio e seguindo as sugestões dadas em sala, resolva os seguintes problemas, sempre justificando sua resposta.

1. Prove que o volume de um prisma é igual à àrea da base vezes a altura. Prove o mesmo para um cilindro.

Dica: use o princípio de Cavalieri comparando com um paralelepípedo retângulo.

2. Prove que tetraedros que possuem a mesma área da base e a mesma altura também possuem o mesmo volume.

Dica: use o princípio de Cavalieri e semelhança de triângulos.

3. Deduza a fórmula do volume de um tetraedro retângulo, em função da área da base e da altura.

Dica: decomponha um prisma retangular de base triangular em três tetraedros (não esqueça de fixar primeiro o tetraedro e escolher o prisma a partir desse) e use o exercício anterior para para provar que os três possuem o mesmo volume.

4. Deduza a fórmula do volume de um tetraedro qualquer e também do volume de um cone.

Dica: em ambos, usamos o exercício anterior e o princípio de Cavalieri.

5. Deduza a fórmula do volume da esfera.

Dica: calcule o volume da semi-esfera comparando, através do princípio de Cavalieri, com o sólido obtido retirando de um cilindro (com raio da base e altura iguais ao raio da esfera) um cone reto.

6. Em uma esfera de raio R fazemos um furo cilíndrico de raio r cujo eixo passa pelo centro da esfera. Calcule o volume da figura obtida.

Dica: Lembre-se da dedução do volume da esfera e use o princípio de Cavalieri para calcular o volume das "calotas" cortadas pelo furo.