

# Matemática na Educação Básica

## 5º Trabalho em grupo

A cada região do plano <sup>1</sup> associamos um número real não negativo que chamamos de *área* dessa região. A área de uma região do plano deverá atender às seguintes propriedades.

- A1** Um segmento de reta tem área zero;
- A2** Se uma região  $A$  está contida em uma região  $B$ , então a área de  $A$  é menor ou igual à área de  $B$ ;
- A3** Se a intersecção entre duas regiões  $A$  e  $B$  tem área zero, então a área de  $A \cup B$  é igual à soma das áreas de  $A$  e  $B$ ;
- A4** Se uma região  $A$  é obtida através da *translação* de uma região  $B$ , então ambas as regiões têm a mesma área;
- A5** Se uma região  $A$  é obtida através da *rotação* de uma região  $B$ , então ambas as regiões têm a mesma área;
- A6** A região delimitada por um quadrado de lado 1 tem área 1.

Resolva as questões seguintes, justificando detalhadamente sua resposta e usando apenas as propriedades descritas acima.

1. Prove que:
  - (a) Um ponto, assim como o conjunto vazio, tem área zero;
  - (b) A área de  $A \cup B$  é menor ou igual à soma das áreas de  $A$  e  $B$ ;
  - (c) Se  $A$  está contido em  $B$ , a área do conjunto  $B \setminus A$  (isto é, dos pontos que estão em  $B$  e não em  $A$ ) é igual à área de  $B$  menos a área de  $A$ .
2. Prove que um retângulo <sup>2</sup> de lados  $a$  e  $b$  têm área  $a \cdot b$ , em cada um dos seguintes casos:
  - (a)  $a$  e  $b$  são números inteiros positivos;
  - (b)  $a$  e  $b$  são da forma  $\frac{1}{m}$  e  $\frac{1}{n}$ , respectivamente, onde  $m$  e  $n$  são números inteiros positivos;
  - (c)  $a$  e  $b$  são números racionais positivos;
  - (d)  $a$  e  $b$  são números reais positivos.
3. Deduza a fórmula da área de um triângulo retângulo.
4. Deduza a fórmula da área de um triângulo qualquer.
5. Deduza a fórmula da área de um paralelogramo e de um trapézio.
6. Prove o teorema de Pitágoras, seguindo as sugestões dadas em aula.
7. Definindo  $\pi$  como a área do círculo de raio 1, prove que  $3 < \pi < 3,5$ . Discuta um método para calcular  $\pi$  com quanta aproximação quisermos.

<sup>1</sup>Na verdade, há uma complexa discussão sobre existir uma noção de área ou volume que contempla *qualquer* região. Não entraremos nesse detalhe aqui, mas assumiremos que todas as figuras mencionadas neste trabalho delimitam regiões *mensuráveis* (isto é, que possuem área). A única restrição que faremos é que uma região do plano tem que ser *limitada* (isto é, contida em um círculo, mesmo que de raio muito grande) para ter área (pois, caso contrário, poderíamos ter uma região com área *infinita*, e não estamos considerando o infinito como um número).

<sup>2</sup>A partir dessa questão, por *área do retângulo* – ou de qualquer outra figura – entendemos a área da região delimitada pela figura. Isto é, contamos o interior, e não apenas o contorno.