

Matemática na Educação Básica

5º Trabalho em grupo

A cada região do plano ¹ associamos um número real não negativo que chamamos de *área* dessa região. A área de uma região do plano deverá atender às seguintes propriedades.

- A1** Um segmento de reta tem área zero;
- A2** Se uma região A está contida em uma região B , então a área de A é menor ou igual à área de B ;
- A3** Se a intersecção entre duas regiões A e B tem área zero, então a área de $A \cup B$ é igual à soma das áreas de A e B ;
- A4** Se uma região A é obtida através da *translação* de uma região B , então ambas as regiões têm a mesma área;
- A5** Se uma região A é obtida através da *rotação* de uma região B , então ambas as regiões têm a mesma área;
- A6** A região delimitada por um quadrado de lado 1 tem área 1.

Resolva as questões seguintes, justificando detalhadamente sua resposta e usando apenas as propriedades descritas acima.

1. Prove que:
 - (a) Um ponto, assim como o conjunto vazio, tem área zero;
 - (b) A área de $A \cup B$ é menor ou igual à soma das áreas de A e B ;
 - (c) Se A está contido em B , a área do conjunto $B \setminus A$ (isto é, dos pontos que estão em B e não em A) é igual à área de B menos a área de A .
2. Prove que um retângulo ² de lados a e b têm área $a \cdot b$, em cada um dos seguintes casos:
 - (a) a e b são números inteiros positivos;
 - (b) a e b são da forma $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$, respectivamente, onde m e n são números inteiros positivos;
 - (c) a e b são números racionais positivos;
 - (d) a e b são números reais positivos.
3. Deduza a fórmula da área de um triângulo retângulo.
4. Deduza a fórmula da área de um triângulo qualquer.
5. Deduza a fórmula da área de um paralelogramo e de um trapézio.
6. Prove o teorema de Pitágoras, seguindo as sugestões dadas em aula.
7. Definindo π como a área do círculo de raio 1, prove que $3 < \pi < 3,5$. Discuta um método para calcular π com quanta aproximação quisermos.

¹Na verdade, há uma complexa discussão sobre existir uma noção de área ou volume que contempla *qualquer* região. Não entraremos nesse detalhe aqui, mas assumiremos que todas as figuras mencionadas neste trabalho delimitam regiões *mensuráveis* (isto é, que possuem área). A única restrição que faremos é que uma região do plano tem que ser *limitada* (isto é, contida em um círculo, mesmo que de raio muito grande) para ter área (pois, caso contrário, poderíamos ter uma região com área *infinita*, e não estamos considerando o infinito como um número).

²A partir dessa questão, por *área do retângulo* – ou de qualquer outra figura – entendemos a área da região delimitada pela figura. Isto é, contamos o interior, e não apenas o contorno.