ALGORITMOS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Paulo Feofiloff

Professor Doutor do
Instituto de Matemática e Estatística da
Universidade de São Paulo

1998

Parcialmente financiado pelos projetos PROTEM–CC–II/CNPq 680065/94-6, FAPESP 96/04505-2 e ProNEx 107/97.

Aos meus pais
e à minha avó,
que me ensinou muitas coisas quando eu era uma criança.
(Pensando bem, ela continuou me ensinando coisas
depois que cresci ...)

Sumário

Prefácio

O problema básico de programação linear consiste no seguinte: dada uma matriz A e vetores b e c, encontrar um vetor x tal que

$$x \geq 0, \quad Ax = b \;\text{ e } cx \text{ é mínimo.}$$

O livro discute este problema, suas generalizações, e a correspondente *teoria da dualidade*. Embora não tenha pré-requisitos formais, o livro exige do leitor uma certa maturidade matemática.

Que. Nosso ponto de partida é o algoritmo de Gauss–Jordan e o célebre algoritmo Simplex. Toda a teoria de programação linear é deduzida desses algoritmos. Do ponto de vista do Simplex, o problema básico de programação linear se reduz ao seguinte: transformar uma matriz dada[1] numa outra equivalente que contém um certo padrão ou "desenho".

Além do Simplex, o livro discute um representante da nova família de algoritmos polinomiais para o problema de programação linear. Trata-se de uma variante do célebre método do elipsóide. Embora não seja uma alternativa prática para o Simplex[2], o algoritmo tem profundas implicações teóricas.

O livro *não* trata de certos aspectos práticos do assunto. Assim, por exemplo, o livro não se ocupa de implementações *aproximadas* do Simplex que representam números em ponto–flutuante; em particular, o livro não trata das heurísticas que procuram reduzir os erros de arredondamento e melhorar o desempenho médio de tais implementações. O livro também não trata das dificuldade práticas associadas com a manipulação de matrizes muito grandes, nem de algoritmos especiais para matrizes esparsas. Finalmente, o livro não trata de *modelagem*, que é a arte de formular certos problemas de planejamento como problemas de programação linear. Todas estas questões são muito importantes na prática, mas estão além dos objetivos do livro (e da vocação do autor).

Como. A atitude do livro é mais *matemática* e *conceitual* que *de engenharia*. Ao mesmo tempo, o enfoque é *algorítmico*: toda a teoria é derivada dos

[1] a matriz resulta da justaposição de A, b e c

[2] outros algoritmo da família, entretanto, já competem com o Simplex

algoritmos (particularmente do Simplex).

Os algoritmos são descritos de maneira precisa, numa linguagem razoavelmente informal. (Para que isso seja possível, é necessário dispor de definições "limpas" para os conceitos de matriz e vetor, de uma notação suficientemente poderosa[3] para descrever partes desses objetos, e de uma boa notação para produtos de vetores e matrizes.) Procuramos dizer com precisão *que* faz cada algoritmo e não só *como* faz o que faz. O comportamento dos algoritmos é descrito por meio de *invariantes*, e o seu *desempenho* de pior caso é analisado.

o que coincide com a idéia de soluções verificáveis

Numa outra dimensão, nossa atitude é mais *algébrica* que *geométrica*. Em particular, exploramos as vantagens de exprimir muitas das operações básicas em notação matricial.

O universo natural para o assunto é o dos *números racionais*. Vamos supor, portanto, que dispomos de um agente computacional capaz de executar aritmética racional. Uma de nossas versões do Simplex manipula os numeradores e denominadores dos números racionais em separado e portanto só usa aritmética *inteira*. Segue daí uma versão do Teorema da Dualidade que especifica delimitações superiores para o "tamanho" das soluções do problema de programação linear.

O livro procura evitar o uso indiscriminado de ferramentas da álgebra linear, porque tais ferramentas são, não raro, mais sofisticadas que as situações concretas que é preciso enfrentar. O livro também procura evitar as "hipóteses simplificadoras" tão comuns em outros textos sobre o assunto (por exemplo, a hipótese de que nossas matrizes têm pôsto pleno e a hipótese de que dispomos de uma *solução viável* ao iniciar a aplicação do Simplex). Tais hipóteses pouco contribuem para simplificar a discussão.

Para quem. O livro se destina a quem quer que queira entender as interconexões lógicas entre as várias peças desse quebra-cabeças que é a programação linear. Em particular, o livro se destina a estudantes de graduação (últimos anos) e pós-graduação em matemática aplicada e ciência da computação. Versões anteriores do livro foram usadas como texto em várias edições da disciplina Programação Linear nos cursos de graduação e pós-graduação em Ciência da Computação no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Histórico. Minha intenção original era adotar o título *Programação Linear Concreta*, numa alusão ao livro de Graham, Knuth e Patashnik [15]. Para explicar o termo "matemática concreta", o prefácio daquele livro diz:

> The course title "Concrete Mathematics" was originally intended as an antidote to "Abstract Mathematics" [...]. Abstract mathematics is a wonderful subject, [...] But [...] The goal of generalization had become so fashionable that a generation of mathematicians has become unable to relish beauty in

[3] mas infelizmente um tanto pesada...

> the particular, to enjoy the challenge of solving quantitative problems, or to appreciate the value of technique.

O bom senso acabou por impedir que eu fizesse uma alusão tão pretenciosa e talvez infundada.

O livro foi formatado em LaTeX nas instalações do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

A elaboração do livro contou com o apoio dos projetos PROTEM–CC–II/CNPq 680065/94-6, FAPESP 96/04505-2 e ProNEx 107/97.

PF `pf@ime.usp.br`
São Paulo, março de 1997