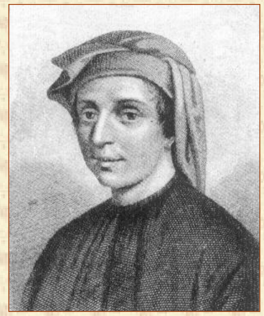
Fibonacci: sua formação e seu legado

Grupo 2:
- André M. Gabrielli
- Arlane M. da Silva e Silva
- Elisabete T. Guerato
- Giovanna Gaspar Bezerra
- Juliana Ikeda
- Juliana Montagner
- Léslie Ferreira Lansky
- Mª José G. de Souza Tanbellini

MAT0341 – História da Matemática I
Profº Antônio C. Brolezzi

Licenciatura Mat. – Diurno
IME – USP
2º semestre / 2006

Vida



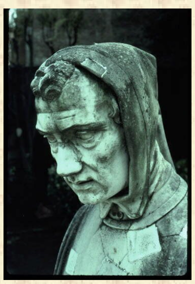
Fibonacci nasceu em Pisa, por volta de 1170.

Viajou pelo Mediterrâneo

(Egito, Síria, Grécia, Sicília, Provença)

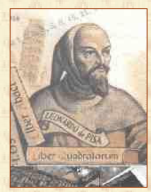
Adquirindo Conhecimento da Matemática Árabe

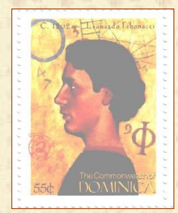
Morreu depois de 1240.



Estátua em homenagem a Fibonacci, situada em Pisa.

Antes e depois de uma restauração





Selo: Dominica, 1999

Não existem imagens de Leonardo de Pisa da sua época, mas há gravuras de como, talvez, ele seria.

Obra

Trabalhos

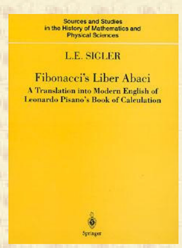
1. ***Liber Abbaci*** (1202, revisado 1228)
2. ***Practica Geometriae*** (1220)
3. ***Flos*** (1225)
4. ***Liber Quadratorum*** (1225)

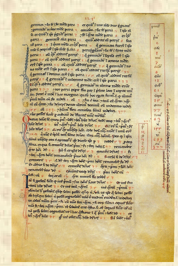
Carta

- *Epistola suprascripti Leonardi ad Magistrum Theodorum phylosophum domini Imperatoris*

1. Liber Abbaci, 1202 e 1228.

- **Livro do ábaco**



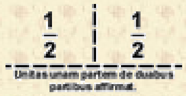


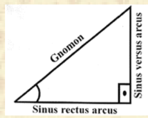
Biblioteca Nacional de Florenza Itália

•Michel Scott – Astrólogo.

Sistema Hindu-Arábico

- Operações com números inteiros
- Inteiros e algumas frações
- Soluções de problemas
- Regra da falsa posição
- Raízes quadradas e cúbicas
- Proporções, Geometria e Álgebra





Problemas considerados:

1. *Um determinado homem aplica um denário a uma taxa tal que em cinco anos tem dois denários e, a cada cinco anos o dinheiro dobra. Quantos denários ele terá após 100 anos?*

2. *Um certo Rei enviou trinta homens ao seu pomar para plantar árvores. Se eles plantassem mil árvores em nove dias, em quantos dias, trinta e seis homens plantariam 4.400 árvores?*

2. Practica Geometriae, 1220.

- Mestre Dominique

1. Problemas práticos (Geometria)
2. Medida de corpos
3. Álgebra e Trigonometria
4. Raízes quadradas e cúbicas
5. Proporções e Problemas indeterminados

3. Flos (ou Flor), 1225.

- Contém os dois últimos problemas do Torneio de Frederick II.

4. Liber Quadratorum, 1225.

- O Imperador Frederick II e o Mestre Johannes de Palermo

O Teste

1. *Encontrar um número quadrado tal que, quando aumentado ou diminuído por 5 o resultado ainda é um quadrado.*

Resposta de Leonardo:

$$11\,\frac{97}{144}$$

OBS:

$$11\frac{97}{144}=\left(3\frac{5}{12}\right)^2, 6\frac{97}{144}=\left(2\frac{7}{12}\right)^2 \quad \text{e} \quad 16\,\frac{97}{144}=\left(4\,\frac{1}{12}\right)^2$$

2. *Encontrar, através dos métodos usados no décimo livro de Euclides, o segmento de comprimento x satisfazendo a equação:*

$$x^3+2x^2+10x-20=0$$

1. Não possui solução geométrica
2. aproximadamente *1,368808*

•Alguns resultados.

Teorema. *Todo número quadrado pode ser formado como a soma de números ímpares sucessivos começando pela unidade.*

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Teorema. *São dados quatro números, não proporcionais, o primeiro sendo menor que o segundo, e o terceiro menor que o quarto, e se a soma dos quadrados do primeiro e do segundo é multiplicada pela soma do terceiro e do quarto, então o resultado será igual, em dois modos, à soma de dois quadrados.*

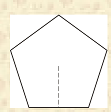
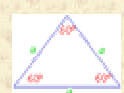
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

Teorema de Leonardo

5. *Epístola*, sem data.

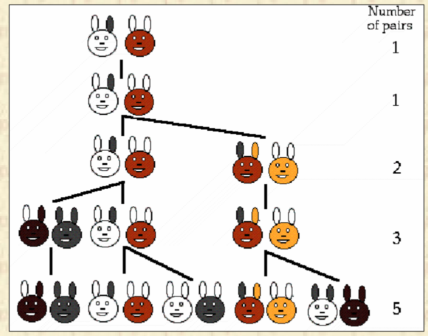
- Resolução de problemas.

1. Um problema geométrico: *"Decompositione pentagonj equilateri in triangulum equicrurium datum."*

 $\Rightarrow$ 

Problema dos pares de coelhos

Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?



A seqüência de Fibonacci

{1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, 89,144,233,377,... }

Fórmula Recursiva

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$n \rangle 0, F_0 = 0, F_1 = 1.$$

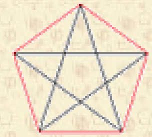
O número de ouro

$$Phi = \varphi = Lim\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\} =$$

$$1{,}618033988749895$$

A Proporção Áurea

Surgiu com os Pitagóricos, séculos antes de cristo a partir das relações entre as medidas do pentagrama.



O número Phi

Recebeu este nome em homenagem ao escultor e arquiteto grego Fídias que utilizou a proporção de ouro em muitas de suas obras, inclusive na fachada do Parthenon.

O número de ouro surgiu da idéia de dividir um segmento de reta em duas partes. Das infinitas formas de se dividir existe uma que é mais agradável aos olhos e que transmite aos nossos sentidos uma operação harmoniosa.

Papiro de Rhind

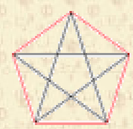
Um exemplo de uso da proporção áurea é o papiro de Rhind que data de aproximadamente 1650 a.C. onde encontramos 85 problemas matemáticos escritos num papiro que mede 5,5 metros de comprimento por 0,32 metros de largura.

Primeiro Número Irracional

Os pitagóricos ficaram muito espantados quando não conseguiram escrever a razão entre o lado do polígono estrelado e o lado do pentágono regular inscrito na forma racional, o que era contrário a toda lógica que conheciam e defendiam na época.

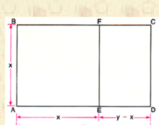
Foi o primeiro número racional que se conheceu e que se teve consciência de que era irracional.

O nome “Número de Ouro” só surgiu 2000 anos depois.



O Retângulo Áureo

Posteriormente os gregos consideraram que o retângulo cujos lados possuía esta relação apresentava uma especial harmonia estética e lhe chamaram retângulo áureo ou retângulo de ouro, considerando esta harmonia como uma virtude excepcional.



Endoxus

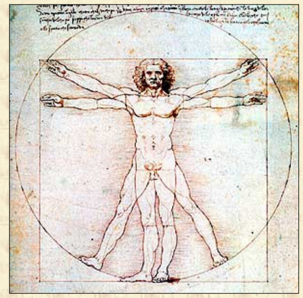
Foi um matemático grego que se tornou conhecido devido à sua teoria das proporções e ao método da exaustão, criou uma série de teoremas gerais de geometria e aplicou o método de análise para estudar a secção que se acredita ser a secção de ouro.

Leonardo da Vinci

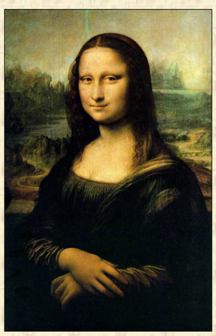
No Renascimento, Leonardo da Vinci utilizou a razão áurea como garantia de uma perfeição, beleza e harmonia únicas.

Dois exemplos são: a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas e o célebre quadro da Mona Lisa que apresenta o retângulo áureo em múltiplos locais.

O Homem Vitruviano



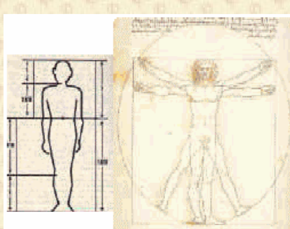
Mona Lisa



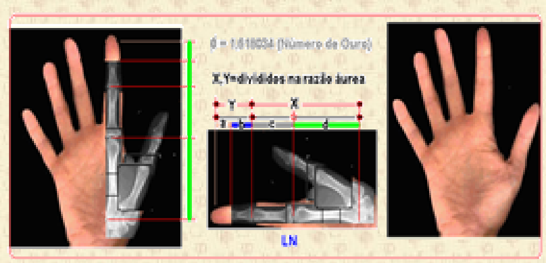
O Número Phi e a Sequência na Natureza

Vejamos onde aparecem:

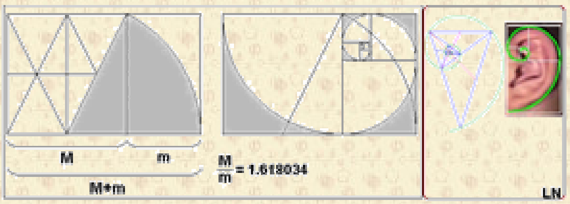
Pessoas



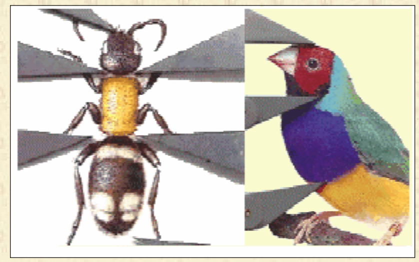
Mãos



Orelha



Animais

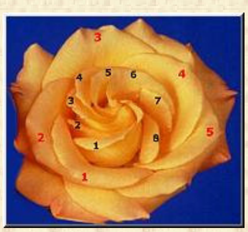


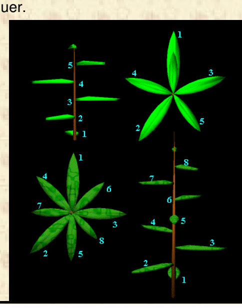
Caracol

Plantas

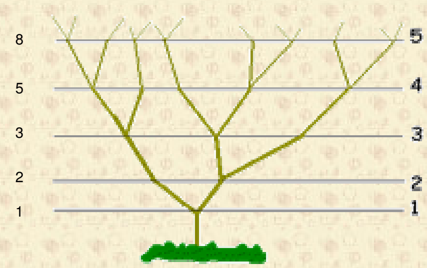
Em muitas plantas, o número de pétalas é um número de Fibonacci:

3 pétalas – lírios e íris;
5 pétalas – columbinas, rainúnclos amarelos e esporas;
8 pétalas – delfíneos;
13 pétalas – crisântemos, cinerária e tasna;
21 pétalas – asteráceas;
34 pétalas – banana-na-terra e malmequer.





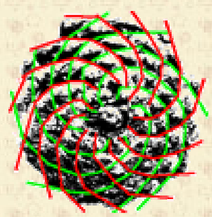
Ramos das Árvores



Cactus

Girassol

Pinha



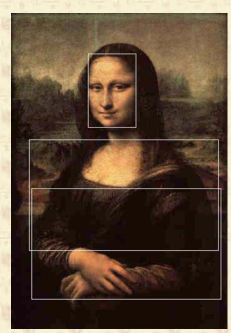
Romanesco

Universo

O número áureo nas obras do homem

Arte e arquitetura

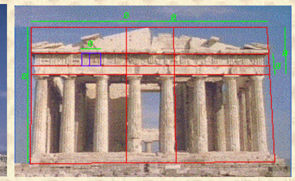
No quadro *Monalisa* (1505) observa-se a proporção áurea em várias situações



A anunciação (1472)

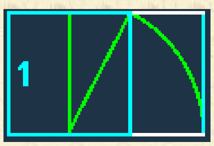
Ao decompor a figura num quadrado e num retângulo, o último tem as proporções áureas.

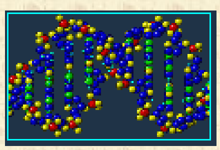
O retângulo que contém a fachada do ***Parthenon*** é um retângulo áureo, cuja razão entre o lado maior e o menor resulta no número Phi.



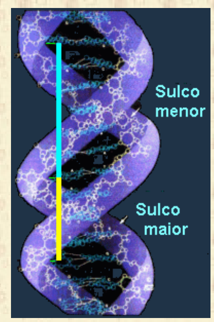
A espiral do DNA é um segmento áureo

A molécula do DNA, o programa de toda a vida, é baseado no segmento áureo. Ele mede 34 Å (ângstrons) de comprimento por 21 Å de largura para cada ciclo completo de sua espiral dupla.

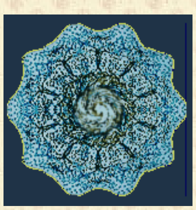




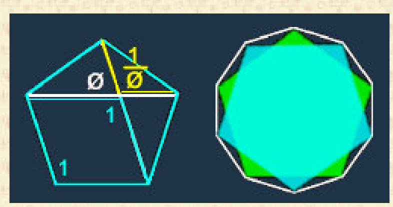
Esta forma do DNA tem tem dois sulcos em sua espiral, cuja razão entre o maior e o menor é phi, ou mais precisamente, de 21 ângstrons para 13 ângstrons.



A secção transversal do DNA é baseada no número Phi



Uma secção transversal da dupla hélice do DNA vista de cima forma um decágono.



A razão entre a diagonal do pentágono e seu lado é Phi. Então, não importa de que modo você olha, mesmo o menor elemento da vida, o DNA, é construído usando phi e o segmento áureo!

Curiosidades

Curiosidades

Algumas relações interessantes para o número Phi e outras formas de determinar Phi:

- $Phi^2 = Phi + 1$
- $1 / Phi = Phi - 1$
- (5 ^ 0,5) * 0,5 + 0,5 = Phi
- $f_n = Phi^n / 5^{½}$ (n-ésimo termo da sequência de Fibonacci)
- $f_n = [Phi^n - (-Phi)^{-n}] / (2Phi-1)$ (Fórmula mais exata do n-ésimo termo)
- phi=2*cos (π / 5) ou $\sqrt{3-\phi} = 2 * \mathrm{sen}(\pi / 5)$
- $\phi = e^{\mathrm{senh}^{-1}(0,5)}$
- $\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$

Curiosidades

O primeiro quadrado perfeito da sequência é 144, que é o 12º número da sequência e a raiz de 144 é 12!

Veja:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, **144**

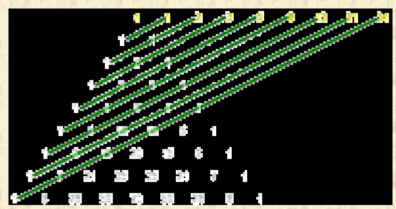
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Curiosidades

A sequência de Fibonacci pode ser encontrada no triângulo de Pascal!

O triângulo de Pascal, desenvolvido pelo matemático francês Blaise Pascal, é formado começando por um äpex"de 1. Todo número abaixo no triângulo é a soma dos dois números diagonalmente acima à esquerda e à direita, com as posições for a do triângulo sendo contadas como zero.

Os números das diagonais somados nos dão a sequência de Fibonacci. Veja:



As Potências de Phi

Phi tem uma relação aditiva original:

$Phi^2 = Phi + 1 \quad \Leftrightarrow \quad Phi^2 = Phi^1 + Phi^0$

E isto leva ao fato de que para todo n (Prove!):

$Phi^{n+2} = Phi^{n+1} + Phi^n$

Assim, a soma de cada duas potências sucessivas de phi é igual a próxima! (Ver quadro ao lado)

n	Phi^n
0	1.000000
1	1.618034
2	2.618034
3	4.236068
4	6.854102
5	11.090170
6	17.944272

Potências de Phi e seu inverso

Elevando Phi a uma potência e somando ou subtraindo seu inverso:

Para n inteiro par:

$Phi^n + 1 / Phi^n$ = um número inteiro

Exemplos:

n	Phi^n	$1/Phi^n$	$Phi^n + 1/Phi^n$
0	1.000000000	1.000000000	2
2	2.618033989	0.381966011	3
4	6.854101966	0.145898034	7
6	17.944271910	0.055728090	18
8	46.978713764	0.021286236	47
10	122.991869381	0.008130619	123

Para n inteiro ímpar:

Phi^n - 1 / Phi^n = um número inteiro

Exemplos:

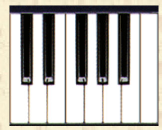
n	Phi^n	1/ Phi^n	Phi^n - 1/Phi^n
1	1.618033989	0.618033989	1
3	4.236067977	0.236067977	4
5	11.090169944	0.090169944	11
7	29.034441854	0.034441854	29
9	76.013155617	0.013155617	76
11	199.005024999	0.005024999	199

Os números inteiros assim gerados têm uma relação entre si, criando uma série aditiva, cuja estrutura é similar à série de Fibonacci, e que também converge para Phi:

Expoente n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Resultado	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199

Música e a Série de Fibonacci

As escalas musicais são baseadas em números de Fibonacci



Há 13 notas em cada oitava no piano. Uma escala compreende 8 notas, das quais a 1ª, a 3ª e a 5ª são a base dos acordes.

No caso do piano, são 8 teclas brancas e 5 pretas separadas em grupos de 3 e de 2.

Escala maior de Dó:

Dó Ré Mi Fá Sol Lá Si Dó

T T S T T T S

Phi na Bíblia

Embora talvez não imediatamente óbvio, phi e o segmento áureo também aparecem na Bíblia.

A Arca de Noé e o Retângulo Áureo

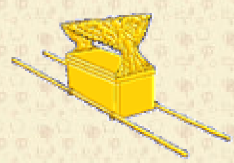
Em Gênesis 6:15, Deus ordena a Noé que construa a arca:

"Deste modo a farás: de trezentos côvados será o comprimento; de cinqüenta, a largura; e a altura, de trinta."

Assim, as extremidades da arca, de 50 por 30 côvados, estão na proporção de 5 para 3, ou 1,666..., que é uma boa aproximação de phi (a diferença não é visível a olho nu).

Nota: Um côvado era uma medida linear de cerca de 45 cm.

A arca da Aliança é um Retângulo Áureo



Em Êxodo 25:10, Deus manda Moisés construir a Arca da Aliança, para nela guardar as Tábuas da Aliança com os israelitas, os Dez Mandamentos, dizendo:

"Também farão uma arca de madeira de acácia; de dois côvados e meio será o seu comprimento, de um côvado e meio, a largura, e de um côvado e meio, a altura."

A razão entre 2.5 e 1.5 é 1.666..., que é tão próximo de (1.618 ...) que a diferença não é visível a olho nu.

A Arca da Aliança é assim construída usando o Segmento Áureo , ou a Divina Proporção. Esta é a mesma razão entre 5 e 3, números da série de Fibonacci.

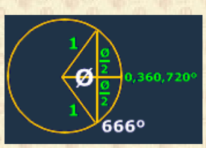
Observação: A arca de Noé foi construída na mesma proporção de dez arcas da aliança colocadas lado a lado.

Phi e o número 666

Apocalipse 13:18 diz:

"Aqui está a sabedoria. Aquele que tem entendimento calcule o número da besta, pois é número de homem. Ora, esse número é seiscentos e sessenta e seis."

Considerado por alguns como o Anti-Cristo descrito por João, esta besta é relacionado ao número 666, um dos maiores mistérios da Bíblia.



Curiosamente, temos:

sen666º = - 0,80901699,

que é metade de – (phi), ou talvez o que alguém poderia chamar de "anti-phi".

sen54º = (phi)/2 ------------ BEM — 360 / 54 = 6,66...

x ? — 36º e 54º são complementares:

sen666º = - (phi)/2 --------- MAL — 36 / 54 = 0,666...

Mistério sobrenatural ou coincidência matemática?

Phi aparece em toda a natureza, e em cada proporção física do corpo humano.

Num certo sentido é o número da humanidade, como a misteriosa passagem do Apocalipse talvez revela.

Bibliografia

- Imenes & Lellis, Microdicionário de Matemática - Ed. Scipione
- Dicionário Internacional de Biografias - Direção de Pierre Grimal - Ed. Brasileira
- Revista Galileu - Especial nº.1 "Eureca" (Abril/2003) - Ed. Globo
- Boyer, Carl B., História da Matemática
- McClenon, R. B., "Leonardo of Pisa and his *Liber Quadratorum", American Mathematical Monthly 1919, 26 (1): 1 – 8.*
- Horadam, A. F., "Fibonacci's Mathematical Letter to Master Theodorus", *Fibonacci Quarterly 1991, vol 29, 103 - 107.*
- Grimm, R. E., "The Autobiography of Leonardo Pisano", *Fibonacci Quarterly 1973, vol 11, (1): 99 - 104.*
- King, C., "Leonardo Fibonacci", *Fibonacci Quarterly : 15 - 19.*

Bibliografia

- http://www.malhatlantica.pt
- http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/alegria/fibonacci/seqfib2.htm
- http://www.cafepress.com/phisource
- http://www.goldennumber.net/
- http://www.mat.uel.br/
- http://www.educ.fc.ul.pt
- http://www.georgetown.edu
- http://www.mathisfun.com-seq