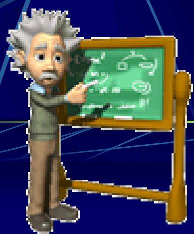
História da Matemática



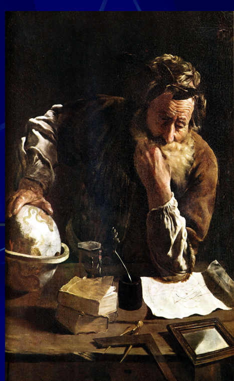
O ensino do cálculo

poderia seguir sua

história ?

Sequência da apresentação

- Um pouco sobre história do cálculo.
- Um pouco como o cálculo é ensinado hoje.
- Entrevistas com professores do Ime.
- Discussão sobre a pergunta-tema.
- Dicas bibliográficas.



Arquimedes de Siracusa
(287 – 212 a.C.)

- Maior matemático da antiguidade
- "O Método" - Método de Exaustão
- Quadratura da parábola
- Área do círculo – Aproximação de pi

Método de Exaustão - Demonstração

Definição: *Dadas duas grandezas diferentes, se da maior se subtrair uma grandeza maior do que a sua metade, e do que sobrar uma grandeza maior do que a sua metade, e se este processo for repetido continuamente, sobrará uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas.*

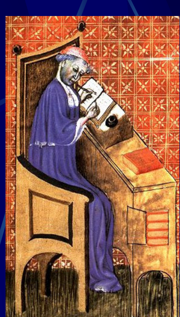
Sejam AB e C duas grandezas desiguais em que AB é a maior.
Então, sejam $AB = \alpha$ e $C = \beta$.

Pela Definição 4, do Livro V, de Euclides: *Duas grandezas têm uma razão, uma para a outra, se, por multiplicação, uma for capaz de exceder a outra*. Então, existe um múltiplo de β que excede α, isto é, existe um número natural n tal que $n\beta > \alpha$.

Retirando de α uma grandeza maior do que sua metade, sobra uma grandeza $\alpha 1$ tal que $n\beta - \beta > \alpha 1$ (de nβ retirou-se β e repare que $\beta < (n\beta)/2$).

E retirando de α1 uma grandeza maior do que a sua metade, sobra uma grandeza α2 tal que $n\beta - \beta - \beta > \alpha 2$ (de nβ retirou-se β e repare que $\beta < (n\beta-\beta)/2$).
Repetindo este processo ao fim de n-2 passos obtemos uma grandeza αn-2 tal que $2\beta > \alpha n-2$.
Retirando de αn-2 uma grandeza maior do que a sua metade, sobra uma grandeza αn-1 tal que $\beta > \alpha n-1$, (de 2β retirou-se β, que é exatamente a sua metade).

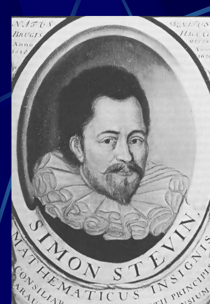
Portanto, ao fim de n-1 passos, obtém-se uma grandeza αn-1 tal que $\alpha n-1 < \beta$, o q quer dizer que se obteve uma grandeza menor do que a menor das grandezas inicialmente dadas.



Nicole Oresme
(1323 – 1382)

* Obteve uma representação da variável funcional da velocidade com relação ao tempo

* Implícita a noção de integral



Simon Stevin
(1548 – 1620)

* Achou a força total da água sobre um dique

* Implícita a noção de integral indefinida

Johann Kepler
(1571 – 1630)

* "Princípio da Continuidade"

* Calculo de volumes de barris de vinho

René Descartes
(1596 – 1650)

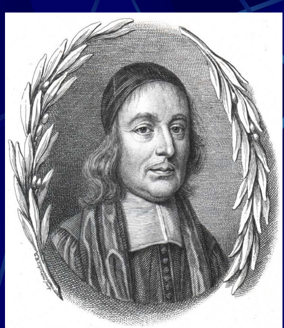
* Álgebra e Geometria se fundem em uma nova área: a Geometria Analítica
* Coordenadas cartesianas
* Retas tangentes a determinadas curvas, relacionadas aos problemas de máximos e mínimos
* Emancipou a prática do método matemático para todas as ciências, ao afirmar: "As longas cadeias de raciocínios tão simples e fáceis, de que os geômetras costumam servir-se para chegar às suas mais difíceis demonstrações proporcionaram-me o desejo de imaginar que todas as coisas, a respeito das quais o homem pode ter conhecimento, se seguem do mesmo modo, desde que ele se abstenha de aceitar por verdadeira uma coisa que não o seja e que respeite sempre a ordem necessária para deduzir uma coisa da outra. Nada haverá tão distante que não se chegue a alcançar por fim, nem tão oculto que não se possa descobrir".

Bonaventura Cavalieri
(1598 – 1647)

* Método dos Indivisíveis
* O teorema, ou princípio, de Cavalieri, q se encontra em sua *Geometria* de 1635, pode ser enunciado assim: *Dois sólidos têm mesmo volume se todo plano secante a eles, paralelo a um dado plano, determina secções d áreas iguais.*

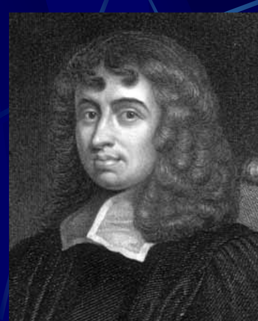
Pierre de Fermat
(1601 – 1665)

* Inventor do processo hoje chamado "diferenciação"
* Método simples de achar máximos e mínimos de curvas polinomiais
* "Princípio do tempo mínimo de Fermat"
* Seu método de integrar x^n era o mais refinado entre os existentes na época, e o mais próximo da integral de Riemann



John Wallis
(1616 – 1703)

* Seu livro *Tractatus de sectionibus conicis* (Tratado de secções cônicas), publicado em 1655, continha a primeira discussão a respeito das cônicas como curvas de segundo grau
* Em *Arithmetica infinitorum* (1656), obteve outros resultados do cálculo, e seus métodos eram agora mais aritméticos e menos geométricos.



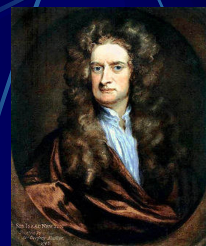
Isaac Barrow
(1630 – 1677)

* Professor de Isaac Newton
* Regra de tangentes muito parecida com o método de máximos e mínimos de Fermat
* Encontrou o método das derivadas, mas faltava lógica

Cálculo a partir de Newton e Leibniz

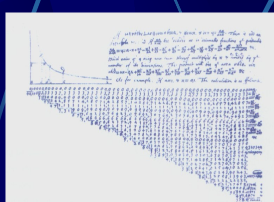
- Após a consolidação da **noção infinitesimal**, o cálculo que conhecemos hoje pôde ser viabilizado.
- **Newton** e **Leibniz** foram os primeiros a perceberem isso.
- O **Cálculo Diferencial Integral** nasceu e consolidou-se.

Isaac Newton (1643 – 1727)



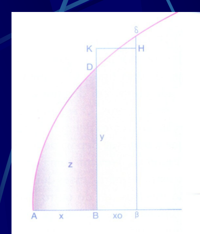
- Utilizou **Série Binomial** para calcular as áreas de inúmeras curvas.
- **Derivada e Integral** são os inversos uma da outra.
- Criou o **Método das Fluxões.**
- As **Leis de Kepler** foram provadas.
- Em seu **Principia**, fundamentou a Teoria do Cálculo.

Teorema do Binômio, já conhecido antes de Newton



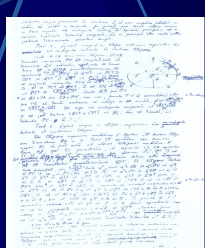
- Desenvolvimento do Teorema do Binômio, inspirado no cálculo da área sobre o gráfico da função y = 1 / (1+x).
- Newton foi o primeiro a considerar as potências fracionais, as quais resultavam em expansões intermináveis. Chegou então a integrações que antes eram impossíveis de serem resolvidas.

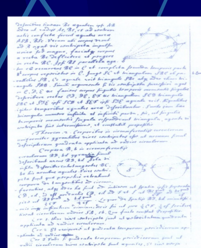
Método das Fluxões



- **Newton adotou uma visão cinemática das grandezas geométricas. Tais grandezas foram chamadas de fluentes e as velocidades a elas referias, chamadas de fluxões. Criou-se, então, o método das fluxões.**
- **Newton demonstra a Halley, baseado no método das fluxões e de cálculos avançados, por ele desenvolvidos, que a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância. Colocando um fim, então, aos questionamentos acerca da segunda Lei de Kepler.**

- Newton prova que a força exercida entre dois astros é inversamente proporcional à distância entre eles.
- Ainda prova que a órbita dos planetas em torno do Sol é uma elipse

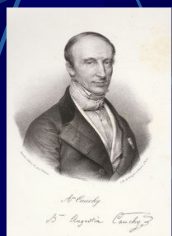




Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716)

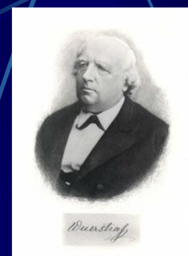
- Análise de funções irracionais e transcendentes.
- Criou sua própria teoria do **Cálculo**, muito parecida com a de Newton.
- Nasce o **Cálculo Diferencial e Integral.**
- **Notações** mais felizes do que as Newton.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)



- Em 1821, introduziu uma notação aperfeiçoada de **limites**.
- Newton e Leibniz não tinham chegado à definição formal de limites.
- Formalizou a definição de **Derivada de uma Função.**
- **A Integral é definida** e não simplesmente a antiderivada.
- Noção de **funções contínuas**.

Karl Weierstrass (1815 – 1897)



- Por fim, definiu elegantemente a notação de Limites, via épsilon e deltas.
- Sua notação perdura até os dias de hoje.

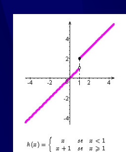
FUNÇÕES

- O conjunto A é chamado de domínio de f (Dom(f));
- O conjunto B é chamado contra-domínio de f (C. Dom (f));
- O conjunto *imagem* é o conjunto de todos os valores de f(x), quando x varia em torno do conjunto A. (Im(f)).

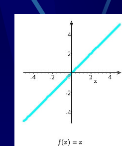
Notação: Uma função de f de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por f: A $\rightarrow$ B

CONTINUIDADES

Definição: Dizemos que f é uma função contínua se f for contínua em todo ponto de seu domínio.

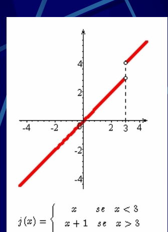


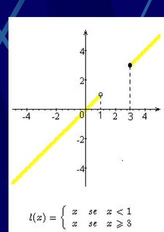
FUNÇÃO DESCONTÍNUA



FUNÇÃO CONTÍNUA

EXEMPLOS





$$\boxed{f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}}$$

LIMITES

Definição: Quando falamos do processo limite, falamos de uma incógnita que "tende" a ser um determinado número, ou seja, no limite, esta incógnita *nunca* vai ser o número, mas vai se aproximar muito, de tal maneira que não se consiga estabelecer uma distância que vai separar o número da incógnita. (Umas das definições intuitivas de limite).

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

EXEMPLO:

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0} -1 = -1$$

DERIVADA

- Definição
- Derivada como a Inclinação da Reta Tangente
- Outras Notações
- Diferenciável
- Regras de Diferenciação
- Aplicações de Diferenciação

INTEGRAL

-Surgimento
- Aplicações
- Técnicas de Integração
- Estratégia de Integração
- Integrais Impróprias
- Aplicações de Integração

Entrevistas

Vera Lucia Carrara

"Não se pode tomar os mesmos passos que os outros tomaram, senão o conhecimento não avança"

Eloi Medina Galego

"Apresentar os problemas sem ter as ferramentas para resolver, o professor perderia muito tempo... o que um professor precisa é mais do que história, e sim bons métodos"

Martha Salerno Monteiro

"O cálculo é ensinado seguindo uma lógica e as coisas não foram descobertas dentro desta lógica."

Claudia Cueva Candido

"Ver as coisas em ordem ajuda a entender melhor o processo de como a ciência se fez"

Zara Issa Abud

"A História da Matemática é uma ótima ferramenta para motivar, para ensinar e para agente aprender"

"A cronologia traz consigo as idéias nascentes e as dificuldades que apareceram"

Antonio Carlos Brolezzi

"O cálculo deve fazer uso de sua história, mas ele não necessariamente precisa seguir a ordem cronológica."

O ensino do Cálculo pode seguir a sua história?

Dessa pergunta podemos nos remeter a 2 interpretações:

- O ensino do Cálculo pode seguir "**cronologicamente**" a sua história?

- O ensino do Cálculo pode estar "**atrelado**" a sua história?

Vejamos um exemplo:

Qual o significado de: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3}$?

Se no fim trata-se apenas de $\lim_{x\to 3} x+3$?

Mas se apresentado $\frac{x^2-9}{x-3}$ como o declive da reta tangente à curva $f(x)= x^2$ no ponto $x_0 =3$, toma mais sentido, pois: $\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \frac{x^2-3^2}{x-3} = x+3$ e para $x \to 3$,temos que o declive é 6.

Considerações acerca de Derivadas tornam o estudo de Limites mais proveitoso.

Limites interessantes como:

$\frac{\cos x - 1}{x}$ $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Também não fazem sentido nenhum quando calculamos Limites acerca dessas expressões.

Mas apresentados como Derivada são muito mais úteis.

Dicas Bibliográficas (livros que seguem a ordem cronológica)

- The Historical Development of Calculus (Edwards)
- Much Ado about Calculus (Robert L. Wilson)
- Second Year Calculus (David M. Bressoud)

Bibliografia

- Carl Boyer – Cálculo
- James Stewart – Cálculo Vol.1
- Guidorizzi – Curso de Cálculo Vol.1
- Revista Matemática Universitária nº 33
- Brolezzi – Mudanças na Matemática da Escola básica para o ensino superior: Reflexo no uso de história da matemática