Construções genéricas de espaços de Asplund $C(K)$

Christina Brech

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Piotr Koszmider

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e do CNPq.

São Paulo, março de 2008

Construções genéricas de espaços de Asplund $C(K)$

Este exemplar corresponde à redação
final da tese devidamente corrigida
e defendida por Christina Brech
e aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Piotr Koszmider (orientador) - T.U. Łodz.
- Prof. Dr. Artur Tomita - IME-USP.
- Prof. Dr. Stevo Todorcevic - Université Paris 7.
- Prof. Dr. Jordi Lopez Abad - Université Paris 7.
- Prof. Dr. Jorge Mujica - IMECC-UNICAMP.

para Papa, Mummy, Ana, Gui
e Alexandre

Agradecimentos

Em primeiro lugar, tenho que agradecer aos meus orientadores Piotr Koszmider e Stevo Todorcevic. O Piotr, cuja paixão pela matemática foi uma fonte de motivação para meu trabalho, me introduziu às aplicações de teoria dos conjuntos à teoria dos espaços de Banach e me incentivou a seguir nesta linha no doutorado e a fazer um estágio de pesquisa em Paris com o Stevo. Foi sempre atencioso, paciente e exigente. O Stevo aceitou ser meu co-orientador e agradeço-lhe por sua disponibilidade e por ter me explicado inúmeras vezes coisas que lhe pareciam tão óbvias e a mim, tão improváveis. Seria impossível resumir em algumas linhas toda a gratidão que sinto por eles: aos dois, muito obrigada!

Agradeço aos Profs. Joan Bagaria e Jorge Mujica por terem aceitado fazer um parecer desta tese, apesar do curto prazo que lhes foi proposto. Agradeço igualmente ao Prof. Artur Tomita, que aceitou participar da banca, e mais particularmente ao Prof. Jordi Lopez Abad, por sua participação na banca, sua ajuda na minha chegada a Paris e seu interesse pelo meu trabalho.

Todo o meu reconhecimento às Profas. Zara Issa Abud e Mary Lilian Lourenço, que guiaram meus primeiros passos na carreira de matemática. Agradeço sinceramente a elas e também aos outros matemáticos do IME e de Chevaleret que me ajudaram ao longo do caminho. As conversas com Ofelia Alas, Antonio Avilés, Valentin Ferenczi, Gilles Godefroy e Lúcia Junqueira me permitiram melhor compreender alguns mistérios da topologia e da teoria dos espaços de Banach.

Finalmente, agradeço aos meus colegas (ex-)doutorandos que tiveram a paciência de ouvir minhas queixas de doutoranda angustiada e com quem tive a oportunidade de travar boas discussões ao longo dos últimos anos. O grupo brasileiro, especialmente Alexandre, André

Hallack, Armando, Demo, Leo, Marcelo Major, Marina, Natalia, Pavlos, Pedro, Rogério e Samuel. E a trupe francesa, que me acolheu calorosamente na sala 5C06, começando por Avenilde e Fares, mas sem esquecer Adrien, Caroline, Clément, David, Elizabeth, Gönenç, Karim, Lionel, Luís, Martin, Matteo e Victor.

Sandro et Valentin, merci pour la révision du texte français!

Odkrycie Banacha było moim
największym odkryciem naukowym.
(Hugo Steinhaus)

Resumo

Neste trabalho consideramos um método de construções genéricas de espaços compactos e dispersos não-metrizáveis, desenvolvido por Baumgartner, Shelah, Rabus, Juhasz e Soukup. Introduzimos novas técnicas e obtemos novas aplicações relevantes tanto para a topologia dos espaços compactos quanto para a geometria dos espaços de Banach de funções contínuas.

As novas técnicas dizem respeito a novas amalgamações de condições do *forcing* que adiciona os espaços dispersos, bem como a generalizações dos argumentos dos autores acima citados de pontos de um espaço compacto K para medidas de Radon sobre K.

Como aplicações, obtemos dois novos espaços compactos e dispersos K_1 e K_2, com as propriedades abaixo.

K_1 é um espaço hereditariamente separável de peso $\aleph_1$ tal que $C(K_1)$ possui a propriedade (C) de Corson e não possui a propriedade (E) de Efremov.

K_2 é o primeiro exemplo de um espaço compacto disperso, hereditariamente separável, de altura ω_2. Segue que o grau de Lindelöf hereditário de K_2 é $\aleph_2$, mostrando a consistência de $hL(K) \not\leq hd(K)^+$ para espaços compactos K. $C(K_2)$ é o primeiro exemplo consistente de um espaço de densidade $\aleph_2$ que não possui um sistema biortogonal não-enumerável.

Palavras-chave: espaço de Banach $C(K)$, *forcing*, espaço disperso, espaço hereditariamente separável, espaço de Asplund, renormações, sistema biortogonal.

Abstract

In this work we consider a method of generic constructions of compact scattered non-metrizable spaces developed by Baumgartner, Shelah, Rabus, Juhasz and Soukup. We introduce new techniques and obtain new applications both relevant to topology of compact spaces and the geometry of Banach spaces of continuous functions.

The new techniques concern new amalgamations of conditions of forcing which add the dispersed spaces as well as the generalizations of arguments of the above-mentioned authors from points of a compact space K to Radon measures on K.

As applications we obtain two compact scattered spaces K_1 and K_2 with the properties below.

K_1 is a hereditarily separable space of weight $\aleph_1$ such that $C(K_1)$ has property (C) of Corson and does not have property (E) of Efremov.

K_2 is the first (consistent) example of a compact scattered space which is hereditarily separable and whose height is ω_2. It follows that its hereditary Lindelöf degree is $\aleph_2$, showing the consistency of $hL(K) \not\leq hd(K)^+$ for compact spaces K. $C(K_2)$ is the first consistent example of a Banach space of density $\aleph_2$ without uncountable biorthogonal systems.

Keywords: Banach space $C(K)$, forcing, scattered space, hereditarily separable space, Asplund space, renormings, biorthogonal system.

Résumé

Dans ce travail nous considérons une méthode de constructions génériques d'espaces compacts et clairsemés non métrisables, développée par Baumgartner, Shelah, Rabus, Juhasz et Soukup. Nous introduisons des nouvelles techniques et nous obtenons des nouvelles applications utiles pour l'étude de la topologie des espaces compacts et de la géométrie des espaces de Banach de fonctions continues.

Les nouvelles techniques concernent de nouvelles amalgamations de conditions du *forcing* qui introduit les espaces clairsemés, ainsi bien que des généralisations des arguments des auteurs cités ci-dessus des points d'un espace compact K aux mesures de Radon sur K.

Comme applications, nous obtenons deux nouveaux espaces compacts et clairsemés K_1 et K_2, avec les propriétés ci-dessous.

K_1 est un espace héréditairement séparable de poids $\aleph_1$ tel que $C(K_1)$ possède la propriété (C) de Corson et ne possède pas la propriété (E) de Efremov.

K_2 est le premier exemple d'un espace compact et clairsemé, héréditairement séparable, dont la hauteur est ω_2. Il s'ensuit que le degré de Lindelöf héréditaire de K_2 est $\aleph_2$, ce qui montre la consistance de $hL(K) \not\leq hd(K)^+$ pour les espaces compacts K. $C(K_2)$ est le premier exemple consistant d'un espace de densité $\aleph_2$ qui ne possède pas de système biorthogonal non dénombrable.

Mots-clés: espace de Banach $C(K)$, *forcing*, espace clairsemé, espace héréditairement séparable, espace d'Asplund, renormages, système biorthogonal.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$	o conjunto dos números naturais
$\mathbb{R}$	o corpo dos números reais
$\aleph_0$	o cardinal enumerável infinito
$\aleph_1$	o primeiro cardinal não-enumerável
$\aleph_2$	o segundo cardinal não-enumerável
ω	o primeiro ordinal enumerável infinito
ω_1	o primeiro ordinal não-enumerável
ω_2	o primeiro ordinal de cardinalidade $\aleph_2$
$\mathfrak{c}$	o cardinal do contínuo
$\lvert X\rvert$	a cardinalidade do conjunto X
$[X]^\kappa$	o conjunto dos subconjuntos de X de cardinalidade κ
$\lVert x\rVert$	a norma do vetor x
X^*	o espaço dual topológico do espaço de Banach X
B_X	a bola unitária fechada do espaço de Banach X
S_X	a esfera unitária do espaço de Banach X
$[A]$	o subespaço de X gerado pelo conjunto A
$\overline{A}^w$	o fecho do conjunto A com respeito à topologia fraca
$\overline{A}^{w^*}$	o fecho do conjunto A com respeito à topologia fraca*
χ_U	a função característica do conjunto U
$p \Vdash$	a condição p força que

Introdução

Um espaço de Banach X é dito um espaço de Asplund se toda função contínua e convexa definida em X a valores reais é Fréchet-diferenciável em todos os pontos de um subconjunto G_δ denso de X.

Em 1975, Asplund [2] mostrou que os espaços de uma certa classe de espaços de Banach, que inclui os espaços $c_0(\Gamma)$ (onde Γ é um conjunto qualquer) e os espaços reflexivos, possuem essa propriedade. Desde então, apareceram na literatura diversas caracterizações dos espaços de Asplund (veja, por exemplo, [29], [42] e [46]) e eles passaram a ter um papel importante na teoria dos espaços de Banach e, em particular, na teoria de renormações.

Para espaços de Banach separáveis X, temos que uma conjunção de resultados devidos a diversos matemáticos, incluindo Asplund, Gregory, Kadec, Klee, Namioka, Phelps e Stegall, entre outros, implica que X admite uma renormação Fréchet-diferenciável se, e somente se, X admite uma função *bump* Fréchet-diferenciável se, e somente se, X é um espaço de Asplund.

É natural perguntarmos então: o que acontece no caso não-separável?

Para espaços de Banach quaisquer, é fácil construir, a partir de uma norma equivalente Fréchet-diferenciável, uma função *bump* Fréchet-diferenciável e pode-se mostrar que se X admite uma função *bump* Fréchet-diferenciável, então X é um espaço de Asplund. Resta, portanto, saber se as recíprocas também são verdadeiras.

A classe dos espaços de Banach $C(K)$ fornece interessantes exemplos de espaços de Banach não-separáveis (veja, por exemplo, [9], [24], [39], [40], [48] e [52]). Aqui temos mais uma situação em que isso acontece: muitos dos exemplos interessantes de espaços de Asplund não-separáveis são espaços $C(K)$. Namioka e Phelps [46] mostraram que, dado um espaço compacto K (ou localmente compacto L), temos que $C(K)$ (ou $C_0(L)$) é de Asplund se, e somente se, K (ou L) é disperso, isto é, se todo subespaço de K (ou L) tem pontos isolados.

Os exemplos de espaços compactos e dispersos mais simples de se definir são: a compactificação de Alexandroff de um espaço discreto; e um ordinal sucessor com a topologia da ordem. Mazurkiewicz e Sierpiński [44] mostraram que todo espaço compacto, métrico e disperso é homeomorfo a um ordinal enumerável com a topologia da ordem.

Entretanto, estamos interessados em espaços de Asplund não-separáveis e, portanto, vamos considerar apenas espaços dispersos não-metrizáveis. Existem na literatura diversas construções destes espaços, que não são homeomorfos a ordinais, construídos por métodos conjuntísticos ([17], [28], [49], [56]) e mesmo compactos ou localmente compactos ([3], [36], [38]). O primeiro exemplo de um espaço compacto e disperso de altura ω_2 e largura enumerável é o de Baumgartner e Shelah [5], obtido por *forcing*.

Lembrando que estamos interessados nas propriedades dos espaços de Asplund $C(K)$ não-separáveis, retornemos às perguntas que nos fizemos: será que todo espaço de Asplund admite uma renormação Fréchet-diferenciável ou admite uma função *bump* Fréchet-diferenciável, tal como acontece com espaços de Asplund separáveis?

Haydon [25] construiu uma árvore T tal que $C_0(T)$ não admite renormação Gâteaux-diferenciável. Árvores são espaços localmente compactos e dispersos e temos, portanto, que $C_0(T)$ é um espaço de Asplund; como a Fréchet-diferenciabilidade de uma função implica sua Gâteaux-diferenciabilidade, segue que esse espaço $C_0(T)$ é um exemplo de um espaço de Asplund que não admite renormação Fréchet-diferenciável.

Mas Haydon [26] provou também que para toda árvore T, $C_0(T)$ admite uma função *bump* Fréchet-diferenciável, de forma que o exemplo construído em seu trabalho anterior, assim como qualquer outra árvore, não pode resolver o seguinte problema, ainda sem resposta: existe um espaço de Asplund que não admite uma função *bump* Fréchet-diferenciável?

Na esperança de respondermos esta pergunta negativamente através de um espaço da forma $C(K)$, o resultado de Haydon nos obriga a buscar exemplos de espaços compactos (ou localmente compactos) e dispersos, não-metrizáveis que não são árvores.

O espaço $C(K)$, onde K é a reta de Kunen (cuja construção foi reproduzida em [48]), é um dos espaços de funções contínuas com mais aplicações na teoria de espaços de Banach: K é um espaço compacto e disperso, construído sob a hipótese do contínuo, tal que toda potência finita é hereditariamente separável. Pode-se então mostrar que o correspondente espaço de Asplund $C(K)$ não admite renormação Fréchet-diferenciável e não possui um sistema biortogonal não-enumerável (veja [31] e [47]). Entretanto, não se sabe se $C(K)$ admite uma renormação Gâteaux-diferenciável nem se $C(K)$ admite uma função *bump* Fréchet-diferenciável. Os espaços que vamos estudar neste trabalho possuem propriedades similares.

Nosso objetivo é apresentar um método de construção por *forcing* de espaços compactos e dispersos não-metrizáveis K e analisar as propriedades topológicas e geométricas dos correspondentes espaços de Asplund $C(K)$. Este método é baseado no espaço construído por Rabus [53] para mostrar a consistência da existência de um espaço inicialmente ω_1-compacto[1] de *tightness* enumerável e não compacto[2], respondendo, assim, uma pergunta de Dow e van Douwen. Esta construção, por sua vez, foi inspirada naquela de Baumgartner e Shelah [5]. Em [33], Juhasz e Soukup fazem uma abordagem alternativa da construção de Rabus, usando a linguagem topológica ao invés da linguagem de álgebras de Boole.

O trabalho é composto por quatro capítulos seguidos por dois apêndices: no primeiro capítulo listamos resultados que serão necessários adiante.

[1]Um espaço é inicialmente ω_1-compacto se todo recobrimento aberto de cardinalidade menor ou igual a $\aleph_1$ possui um subrecobrimento finito.

[2]Cabe notar que, na realidade, Rabus [53] constrói uma álgebra de Boole superatômica, cujo espaço de Stone possui um ponto distinguido, de forma que, ao retirarmos tal ponto, o espaço obtido possui as propriedades que mencionamos.

No segundo capítulo, apresentamos o método de construção de espaços compactos e dispersos a que já nos referimos: definimos um *forcing* que introduz uma topologia sobre um ordinal não-enumerável $\theta \leq \omega_2$ e que depende, assim como em [33], de uma função que associa subconjuntos enumeráveis de θ a pares de θ. As propriedades de f influenciam as propriedades da topologia introduzida sobre θ.

Após apresentar o *forcing* e mostrar que ele, de fato, introduz uma topologia sobre θ de forma que obtemos um espaço compacto e disperso não-metrizável, provamos alguns resultados técnicos sobre o *forcing* que serão utilizados nos capítulos subseqüentes: os Lemas 2.13 e 2.14. Ambos são resultados combinatórios que garantem a existência de amalgamações, ou seja, de uma condição do *forcing* que estende outras duas, sob algumas hipóteses a respeito destas. O Lema 2.13 tem hipóteses bastante fortes sobre as condições do *forcing* a serem estendidas, mas que garantem a possibilidade de se construir uma amalgamação que "copia uma condição dentro da outra". No Lema 2.14, temos uma mistura entre as idéias das amalgamações introduzidas em [33] e [53] e as do Lema 2.13. Aqui, as hipóteses sobre as condições a serem amalgamadas são mais fracas, de forma que a dificuldade para construir uma amalgamação como se quer aumenta.

No terceiro capítulo, fixamos $\theta = \omega_1$, $f = \min$ e obtemos um espaço compacto e disperso K_1 de peso $\aleph_1$, de forma que $C(K_1)$ é um espaço de Asplund não-separável. Como a função f aqui é simples e tem propriedades bastante fortes, conseguimos atingir as hipóteses do Lema 2.13 e mostramos, usando esse lema, que toda potência finita de K_1 é hereditariamente separável. Concluímos que $C(K_1)$ não admite renormação Fréchet-diferenciável e não possui um sistema biortogonal não-enumerável. Passamos daí a analisar outras propriedades de $C(K_1)$ e, generalizando uma idéia de Rabus [53], mostramos que $C(K_1)$ não possui a propriedade (E) de Efremov [18]. Um outro espaço que tem (C) e não tem (E) foi construído por Justin T. Moore (não publicado), usando o princípio conjuntístico $\diamondsuit$, respondendo consistentemente uma pergunta de Plichko e Yost [51].

No quarto capítulo, fixamos $\theta = \omega_2$ e uma função f com propriedades mais fortes do que aquela utilizada em [5], [33] e [53]: um resultado não-publicado de Koszmider, que apresentamos no Apêndice A, garante a consistência com ZFC da existência dessa função. Assim, obtemos um espaço compacto e disperso K_2 de peso $\aleph_2$, de forma que $C(K_2)$ é, também, um espaço de Asplund não-separável. Aqui, graças às propriedades da função f, conseguimos usar o Lema 2.14 para mostrar que toda potência finita de K_2 é hereditariamente separável.

Mostramos que K_2 tem altura ω_2 e temos, portanto, o primeiro exemplo consistente de um espaço compacto e disperso, hereditariamente separável de altura ω_2. Lembramos que a hipótese do contínuo implica que não existe um espaço compacto e disperso de altura ω_2 e largura enumerável e Just [35] mostrou, usando o *forcing* de Cohen, que a não existência destes espaços também é consistente com a negação da hipótese do contínuo. O primeiro exemplo consistente de um espaço compacto e disperso, de largura enumerável e altura ω_2 é o de Baumgartner e Shelah [5].

Segue que o grau de Lindelöf hereditário de K_2, $hL(K_2)$, é $\aleph_2$. Logo, nosso espaço é um contra-exemplo consistente para a desigualdade $hL(K) \leq hd(K)^+$, onde $hd(K)$ é a densidade hereditária de K. O interesse por essa desigualdade se deve à espécie de dualidade existente entre esses dois cardinais invariantes, juntamente com a seguinte conseqüência de um resultado de Shapirovskiĭ [62]: para todo espaço compacto K, temos que $hd(K) \leq hL(K)^+$.

Finalmente, do fato que o peso de K_2 é $\aleph_2$ segue que a densidade de $C(K_2)$ também é $\aleph_2$ e como toda potência finita de K_2 é hereditariamente separável, temos que $C(K_2)$ não admite renormação Fréchet-diferenciável e não possui um sistema biortogonal não-enumerável. Desta forma, este é o primeiro exemplo consistente de um espaço de Banach $C(K)$ de densidade estritamente maior que $\aleph_1$ que não possui um sistema biortogonal não-enumerável. Esse exemplo se opõe ao seguinte teorema de Todorcevic [65]: se um espaço de Banach da forma $C(K)$ tem densidade estritamente maior que $\aleph_1$, então ele possui um sistema semi-biortogonal não-enumerável. Assim, nosso exemplo mostra que o resultado de Todorcevic não pode ser generalizado em ZFC, substituindo-se a existência de um sistema semi-biortogonal não-enumerável pela existência de um sistema biortogonal não-enumerável.

Por fim, apresentamos no Apêndice A a construção de um *forcing*, usando pântanos simplificados, que adiciona a função f que usamos no Capítulo 4, mostrando, assim, que a existência dessa função é consistente com ZFC. Os resultados deste apêndice são devidos a Koszmider e não foram publicados.

O Apêndice B compreende um resumo substancial da presente tese em língua francesa.

Capítulo 1

Definições e resultados preliminares

Nosso objetivo neste capítulo é fixar a notação e lembrar resultados que serão utilizados nos capítulos subseqüentes. Para isso, vamos apresentar as principais definições e enunciar os resultados que usaremos adiante. Procuramos fornecer referências básicas para cada uma das teorias abordadas, onde podem ser encontrados a notação que adotamos e as definições e resultados que eventualmente não incluímos aqui. Indicamos também, sempre que possível, o primeiro trabalho em que cada resultado ou definição apareceu.

1.1 Teoria dos conjuntos

Indicamos Jech [30] como referência básica para definições e resultados de teoria dos conjuntos.

Notação 1.1. *Dados um ordinal α e um conjunto de ordinais a, dizemos que $\alpha < a$ (resp. $a < \alpha$) se para todo $\beta \in a$, tem-se que $\alpha < \beta$ (resp. $\beta < \alpha$); se a e b são dois conjuntos de ordinais, dizemos que $a < b$ se para todo $\alpha \in a$, tem-se que $\alpha < b$.*

Definição 1.2. *Uma família de conjuntos A é um Δ-sistema se existe um conjunto finito D tal que para quaisquer $a_1, a_2 \in A$ distintos, tem-se que $a_1 \cap a_2 = D$. O conjunto D é chamado de raiz do Δ-sistema A.*

O seguinte resultado é conhecido como Lema do Δ-sistema.

Lema 1.3 (Shanin [61]). *Para toda família não-enumerável A de conjuntos finitos, existe uma subfamília não-enumerável B de A que forma um Δ-sistema.*

Demonstração. Veja o Teorema 9.18 de [30] ou Teorema 1.5 de [41]. □

1.2 Topologia

Indicamos Engelking [19] como referência básica para definições e resultados de topologia[1].

Todos os espaços topológicos em questão são de Hausdorff.

Definição 1.4. *O peso de um espaço topológico X, $w(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que existe uma base topológica de X de cardinalidade menor ou igual a κ.*

Teorema 1.5 (Alexandroff [1]). *Todo espaço localmente compacto, não-compacto L possui uma compactificação K tal que $|K \setminus L| = 1$ e $w(K) = w(L)$.*

Demonstração. Veja o Teorema 3.5.11 de [19]. □

Notação 1.6. *Chamamos o espaço compacto dado pelo teorema acima de compactificação de Alexandroff de L e denotamos $\{*\} = K \setminus L$.*

Definição 1.7. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é zero-dimensional se X possui uma base topológica formada por subconjuntos abertos-fechados de X.*

Densidade e grau de Lindelöf

Definição 1.8. *A densidade de um espaço topológico X, $d(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que X possui um subconjunto denso D de cardinalidade menor ou igual a κ. Se $d(X) = \aleph_0$, dizemos que X é separável.*

[1] Convém mencionar que a maioria das definições e resultados que enunciamos neste capítulo devem-se a diversos matemáticos, incluindo Cantor, Fréchet e Hausdorff, entre outros. Entretanto, na maioria dos casos não indicamos os trabalhos em que essas definições e resultados apareceram pela primeira vez nem seus autores, pois sofreram diversas modificações desde as primeiras versões até chegarem a sua forma atual.

A densidade hereditária de um espaço topológico X, $hd(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que para todo subespaço topológico Y de X, tem-se que $d(Y) \leq \kappa$. Se $hd(X) = \aleph_0$, dizemos que X é hereditariamente separável.

Definição 1.9. *Uma família $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de pontos de um espaço topológico X é dita uma seqüência separada à esquerda se existe uma família $(V_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ tal que para cada $\alpha < \kappa$, V_α é uma vizinhança aberta de x_α e para todo $\alpha < \beta < \kappa$, tem-se que $x_\alpha \notin V_\beta$.*

Proposição 1.10. *A densidade hereditária de um espaço topológico é o menor cardinal κ tal que X não possui nenhuma seqüência separada à esquerda de cardinalidade κ^+.*

Demonstração. Veja o Teorema 3.1 de [56]. □

Proposição 1.11. *Se K é um espaço compacto separável, então $w(K) \leq \mathfrak{c}$.*

Demonstração. Veja o Corolário 7.7 de [27]. □

Definição 1.12. *O grau de Lindelöf de um espaço topológico X, $L(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que todo recobrimento aberto de X possui um subrecobrimento de cardinalidade menor ou igual a κ. Se $L(X) = \aleph_0$, dizemos que X é Lindelöf.*

O grau de Lindelöf hereditário de um espaço topológico X, $hL(X)$, é o menor cardinal infinito κ tal que para todo subespaço topológico Y de X, tem-se que $L(Y) \leq \kappa$. Se $hL(X) = \aleph_0$, dizemos que X é hereditariamente Lindelöf.

Definição 1.13. *Uma família $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de pontos de um espaço topológico X é dita uma seqüência separada à direita se existe uma família $(V_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ tal que para cada $\alpha < \kappa$, V_α é uma vizinhança aberta de x_α e para todo $\alpha < \beta < \kappa$, tem-se que $x_\beta \notin V_\alpha$.*

Proposição 1.14. *O grau de Lindelöf hereditário de um espaço topológico é o menor cardinal κ tal que X não possui nenhuma seqüência separada à direita de cardinalidade κ^+.*

Demonstração. Veja a Proposição 7.6 de [48]. □

Teorema 1.15 (Shapirovskiĭ [62])**.** *Para qualquer espaço compacto K, $hd(K) \leq hL(K)^+$.*

Demonstração. Veja o Teorema 7.17 de [27] □

Medidas de Radon

Notação 1.16. *Dado um espaço topológico X, denotamos por $Bor(X)$ a σ-álgebra dos subconjuntos borelianos de X.*

Adotamos a seguinte noção de medida de Radon (Definição 18.2.3 de [60]):

Definição 1.17. *Seja K um espaço topológico compacto. Uma medida de Radon μ sobre K é uma medida com sinal, boreliana, limitada e regular, ou seja, é uma função $\mu : Bor(K) \to \mathbb{R}$ tal que*

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- *para toda família $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos borelianos de K dois a dois disjuntos, tem-se que*
$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n);$$
- *para todo $B \in Bor(K)$, tem-se que*
$$|\mu|(B) = \sup\{\sum_{i=1}^{k} |\mu(B_i)| : B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i,\ B_i \in Bor(K) \text{ e } B_i \cap B_j = \emptyset,\ \text{se } i \neq j\} < \infty;$$
- *para todo $B \in Bor(K)$ e todo $\varepsilon > 0$ existem conjuntos F compacto e G aberto tais que $F \subseteq B \subseteq G$ e $|\mu|(G \setminus F) < \varepsilon$.*

Notação 1.18. *Dado um espaço topológico compacto K, denotamos por $M(K)$ o conjunto das medidas de Radon sobre K; para cada $\mu \in M(K)$, denotamos por $\|\mu\| = |\mu|(K)$.*

Notação 1.19. *Dado um espaço topológico compacto K e $x \in K$, denotamos por δ_x a medida de Dirac com suporte no ponto x. Observe que δ_x é uma medida de Radon e $\|\delta_x\| = 1$.*

Espaços dispersos

Definição 1.20. *Um espaço topológico X é disperso se todo subespaço de X tem um ponto isolado.*

Os exemplos mais comuns de espaços compactos dispersos são: a compactificação de Alexandroff de um espaço discreto e um ordinal sucessor com a topologia da ordem. Mazurkiewicz e Sierpiński [44] mostraram que todo espaço compacto, métrico e disperso é homeomorfo a um ordinal enumerável com a topologia da ordem. Alguns exemplos de espaços dispersos não-metrizáveis interessantes podem ser encontrados em [5] e [49].

Lembramos que um espaço compacto K é disperso se, e somente se, não existe nenhuma função contínua $f : K \to [0,1]$ sobrejetora se, e somente se, K é zero-dimensional e não existe nenhuma função contínua $f : K \to 2^\omega$ sobrejetora (veja o Teorema 8.5.4 de [60]). Além disso, um espaço compacto zero-dimensional K é disperso se, e somente se, a álgebra de Boole $Clop(K)$, formada pelos subconjuntos abertos-fechados de K, é superatômica (veja o Teorema 1.1 de [57]).

Definição 1.21. *Dado um espaço topológico X, o conjunto derivado de X, que denotamos por X', é o conjunto dos pontos de acumulação de X, ou seja, o conjunto dos pontos de X que não são isolados em X. Definimos recursivamente, para cada ordinal α, $X^{(\alpha+1)} = (X^{(\alpha)})'$ e para cada ordinal limite λ, $X^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} X^{(\alpha)}$.*

Teorema 1.22 (Cantor, Bendixon)**.** *Seja X um espaço topológico. Então existe um ordinal α tal que $X^{(\alpha)} = X^{(\alpha+1)}$. X é disperso se, e somente se, existe um ordinal α tal que $X^{(\alpha)} = \emptyset$.*

Demonstração. Veja o Teorema 8.5.2 de [60]. □

Seja K um espaço compacto e disperso e seja α o menor ordinal tal que $K^{(\alpha)} = K^{(\alpha+1)}$. Observe que, como K é disperso, temos que $K^{(\alpha)} = \emptyset$. Daí, do fato que K é compacto segue que α é um ordinal sucessor: senão, $(K^{(\beta)})_{\beta<\alpha}$ seria uma família decrescente infinita de subconjuntos fechados e não-vazios de K cuja intersecção é vazia e, pela minimalidade de α, não teria nenhuma subfamília finita cuja intersecção fosse vazia, contradizendo a compacidade de K. Portanto, $\alpha = \beta + 1$, para algum ordinal β e observe que $K^{(\beta)}$ é finito.

Definição 1.23. *Seja K um espaço compacto e disperso. A altura[2] de K, $ht(K)$, é o menor ordinal α tal que $K^{(\alpha)}$ é finito e a largura de K, $wd(K)$, é o menor cardinal infinito κ tal que para todo $\beta < ht(K)$, tem-se que $|K^{(\beta)} \setminus K^{(\beta+1)}| \leq \kappa$.*

[2]Enfatizamos que estamos adotando a definição de altura de [5], freqüentemente utilizada para espaços dispersos. Alternativamente, poderia-se definir a altura como o menor ordinal α tal que $K^{(\alpha)} = \emptyset$.

Proposição 1.24. *Seja θ um ordinal e para cada $\xi \in \theta$ seja $V_\xi \subseteq \theta$ tal que $\xi = \max V_\xi$. Considere τ a topologia sobre θ que possui o conjunto*

$$\{V_\xi : \xi \in \theta\} \cup \{\theta \setminus V_\xi : \xi \in \theta\}$$

como sub-base. Suponha que existe uma função $i : [\theta]^2 \to [\theta]^{<\aleph_0}$ tal que para quaisquer $\xi < \eta < \theta$, $i(\{\xi, \eta\}) \subseteq \xi$ e:

- *se $\xi \in V_\eta$, então $V_\xi \setminus V_\eta \subseteq \bigcup_{\zeta \in i(\{\xi,\eta\})} V_\zeta$;*
- *se $\xi \notin V_\eta$, então $V_\xi \cap V_\eta \subseteq \bigcup_{\zeta \in i(\{\xi,\eta\})} V_\zeta$.*

Então para todo $\xi \in \theta$, V_ξ é compacto e

$$\{V_\xi \setminus \bigcup_{\eta \in F} V_\eta : F \in [\eta]^{<\aleph_0}\}$$

forma um sistema fundamental de vizinhanças abertas de ξ.

Portanto, (θ, τ) é um espaço disperso, localmente compacto e zero-dimensional.

Demonstração. O fato que cada V_ξ é compacto segue do Teorema 1.5 de [33].

Seja $U \in \tau$ e $\xi \in U$. Como o conjunto

$$\{V_\xi : \xi \in \theta\} \cup \{\theta \setminus V_\xi : \xi \in \theta\}$$

é uma sub-base, existem $F, G \subseteq \theta$ finitos tais que

$$\xi \in \bigcap_{\eta \in F} V_\eta \cap \bigcap_{\eta \in G} (\theta \setminus V_\eta) \subseteq U.$$

Segue do fato que para todo $\eta \in \theta$, $\max V_\eta = \eta$ que para todo $\eta \in F$, $\eta \geq \xi$. Considere $G_1 = \{\eta \in G : \xi < \eta\}$ e observe que

$$\xi \in V_\xi \setminus \bigcup \{V_\zeta : \zeta \in \bigcup_{\eta \in F \cup G_1} i(\{\xi, \eta\}) \text{ ou } \zeta \in G \setminus G_1\} \subseteq \bigcap_{\eta \in F} V_\eta \cap \bigcap_{\eta \in G} (\theta \setminus V_\eta) \subseteq U.$$

Temos assim que (θ, τ) é localmente compacto e zero-dimensional e observe que para todo $X \subseteq \theta$, $\min X$ é um ponto isolado de X, de forma que (θ, τ) é disperso. $\square$

Proposição 1.25. *Para todo espaço compacto e disperso K existe um ordinal θ e uma topologia τ sobre θ tal que K é homeomorfo ao espaço topológico (θ, τ) e para cada $\xi \in \theta$, existe uma vizinhança aberta V_ξ de ξ tal que $\max V_\xi = \xi$ e o conjunto*

$$\{V_\xi : \xi \in \theta\} \cup \{\theta \setminus V_\xi : \xi \in \theta\}$$

é uma sub-base.

Demonstração. Seja α tal que $K^{(\alpha)} = \emptyset$ e para cada $x \in K$, defina $rank(x) = \beta < \alpha$, onde β é o ordinal tal que $x \in K^{(\beta)} \setminus K^{(\beta+1)}$ e sejam θ um ordinal e $h : K \to \theta$ uma bijeção tal que para todo $x, y \in K$, se $rank(x) < rank(y)$, então $h(x) < h(y)$. Para cada $x \in K$, seja U_x uma vizinhança aberta-fechada de x em K tal que $U_x \cap K^{(rank(x))} = \{x\}$ e para cada $\xi \in \theta$, tome $V_\xi = h[U_{h^{-1}(\xi)}]$. Seja τ a topologia sobre θ que possui o conjunto

$$\{V_\xi : \xi \in \theta\} \cup \{\theta \setminus V_\xi : \xi \in \theta\}$$

como sub-base. h é uma função bijetora e contínua entre compactos e, portanto, é um homeomorfismo de K sobre θ. Observe que para todo $\xi \in \theta$, temos que $\max V_\xi = \xi$. $\square$

Definição 1.26. *Seja K um espaço compacto ou localmente compacto e μ uma medida de Radon sobre K. μ é uma medida atômica se existem uma seqüência de reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma seqüência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em K tais que*

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \delta_{x_n} \quad e \quad |\mu| = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty.$$

Teorema 1.27. *Seja K um espaço compacto ou localmente compacto. K é disperso se, e somente se, toda medida de Radon sobre K é atômica.*

Demonstração. Veja o Teorema 19.7.6 de [60]. $\square$

1.3 Espaços de Banach

Indicamos Fabian *et al* [20] como referência básica para a teoria geral de espaços de Banach e Deville, Godefroy e Zizler [15] para a teoria de renormações[3] e espaços de Asplund.

Todos os espaços de Banach em questão são espaços de Banach reais de dimensão infinita.

Teorema 1.28. *Todo subconjunto convexo e fechado de um espaço de Banach é fracamente fechado.*

Demonstração. Veja o Teorema 3.19 de [20]. □

Espaços de Asplund

Definição 1.29. *Uma função f definida num espaço de Banach X a valores reais é dita Fréchet-diferenciável em $x \in X$ se existe $f'(x) \in X^*$ tal que* $\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)-f'(x)y}{\|y\|} = 0$.

Dizemos que uma norma $\|\cdot\|$ em um espaço de Banach X é Fréchet-diferenciável se $\|\cdot\|$ é Fréchet-diferenciável em todo $x \in S_X$.

Definição 1.30 (Asplund [2])**.** *Um espaço de Banach X é um espaço de Asplund se toda função contínua e convexa $f : X \to \mathbb{R}$ é Fréchet-diferenciável em todos os pontos de um subconjunto G_δ denso de X.*

O seguinte resultado, devido a diversos matemáticos, incluindo Asplund, Gregory, Namioka e Stegall, fornece uma bela caracterização desses espaços:

Teorema 1.31. *Um espaço de Banach é de Asplund se, e somente se, o dual de todo subespaço separável é separável.*

Demonstração. Veja o Teorema 5.7 de [15] ou o Teorema 8.26 de [20]. □

Definição 1.32. *Dado um espaço de Banach X, dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função* bump *se ela tem suporte limitado e não-vazio.*

[3]Renormar um espaço de Banach é substituir a norma dada por uma norma equivalente.

O seguinte teorema se deve a uma conjunção de resultados devidos a diversos matemáticos (veja [21]):

Teorema 1.33. *Dado um espaço de Banach X, temos que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$, onde:*

(a) X admite uma renormação Fréchet-diferenciável;

(b) X admite uma função bump *Fréchet-diferenciável;*

(c) X é um espaço de Asplund.

Além disso, se X é separável, então $(c) \Rightarrow (a)$ e, portanto, (a), (b) e (c) são equivalentes.

Demonstração. Veja o Teorema 5.3 de [15]. □

A estrutura dos espaços de Banach

Definição 1.34 (Mazur [43])**.** *A norma de um espaço de Banach X possui a propriedade de intersecção de Mazur se todo subconjunto convexo, fechado e limitado de X se escreve como uma intersecção de bolas fechadas.*

Teorema 1.35 (Mazur [43])**.** *Se a norma de um espaço de Banach X é Fréchet-diferenciável, então ela tem a propriedade de intersecção de Mazur.*

Demonstração. Veja a Proposição 4.5 de [15]. □

Proposição 1.36 (Jiménez-Sevilla, Moreno [31])**.** *Se X é um espaço de Banach cuja norma tem a propriedade de intersecção de Mazur, então existe um subconjunto limitado A de X tal que $|A| = d(X)$ e para todo $x_0 \in A$, tem-se que $x_0 \notin \overline{[A \setminus \{x_0\}]}^{w}$.*

Demonstração. Segue da Proposição 4.1 de [31]. □

Definição 1.37. *Um sistema semi-biortogonal de um espaço de Banach X é uma família de pares $(x_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha<\kappa} \subseteq X \times X^*$ tal que para todo $\alpha, \beta < \kappa$, tem-se que:*

- *se $\alpha < \beta$, então $\varphi_\beta(x_\alpha) = 0$;*

- *se* $\alpha = \beta$*, então* $\varphi_\beta(x_\alpha) = 1$*;*
- *se* $\alpha > \beta$*, então* $\varphi_\beta(x_\alpha) \geq 0$*.*

Um sistema biortogonal de um espaço de Banach X *é uma família de pares* $(x_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha<\kappa} \subseteq X \times X^*$ *tal que para todo* $\alpha, \beta \in \kappa$*, tem-se que:*

- *se* $\alpha \neq \beta$*, então* $\varphi_\beta(x_\alpha) = 0$*;*
- *se* $\alpha = \beta$*, então* $\varphi_\beta(x_\alpha) = 1$*.*

Observe que todo sistema biortogonal é um sistema semi-biortogonal.

Teorema 1.38. *Seja* X *um espaço de Banach não-separável e hereditariamente Lindelöf com respeito à topologia fraca. Então* X *não admite renormação Fréchet-diferenciável e não possui nenhum sistema biortogonal não-enumerável.*

Demonstração. Suponhamos que X é não-separável e admite uma renormação Fréchet-diferenciável e mostremos que X não é hereditariamente Lindelöf com respeito à topologia fraca. Segue do Teorema 1.35, que X admite uma renormação com a propriedade de intersecção de Mazur. Pelo Teorema 1.36, existe uma família limitada $(x_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \subseteq X$ tal que para todo $\alpha < \omega_1$,

$$x_\alpha \notin \overline{[x_\beta : \beta < \omega_1 \text{ e } \beta \neq \alpha]}^w.$$

Logo, $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma seqüência separada à direita com respeito à topologia fraca. Pela Proposição 1.14, temos que X não é hereditariamente Lindelöf com respeito à topologia fraca.

Suponhamos agora que $(x_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha<\omega_1} \subseteq X \times X^*$ é um sistema biortogonal não-enumerável de X. Temos que para todo $\alpha < \omega_1$,

$$x_\alpha \notin \overline{[x_\beta : \beta < \omega_1 \text{ e } \beta \neq \alpha]}^w.$$

Logo, $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma seqüência separada à direita em X, com respeito à topologia fraca. Pela Proposição 1.14, temos que X não é hereditariamente Lindelöf com respeito à topologia fraca. $\square$

1.4 Espaços de Banach de funções contínuas

Indicamos Fabian *et al* [20] e Semadeni [60] como referências básicas para a teoria dos espaços de Banach $C(K)$.

Notação 1.39. *Seja K um espaço compacto (resp. L um espaço localmente compacto). Denotamos por $C(K)$ (resp. $C_0(L)$) o espaço de Banach das funções contínuas definidas em K a valores reais (resp. o espaço das funções contínuas definidas em L a valores reais que se anulam no infinito), munido da norma do supremo.*

Começamos recordando a seguinte versão do Teorema de Stone-Weierstrass:

Teorema 1.40 (Stone [64]; Weierstrass [68])**.** *Seja K um espaço compacto (resp. L localmente compacto) e zero-dimensional e seja $Clop(K)$ (resp. $Clop(L)$) a álgebra dos subconjuntos abertos-fechados de K (resp. L). Então o conjunto*

$$\{\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{\mathcal{U}_i} : n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall 1 \leq i \leq n,\ \mathcal{U}_i \in Clop(K) \text{ (resp. } Clop(L)),\ a_i \in \mathbb{Q}\}$$

é denso em $C(K)$ (resp. $C_0(L)$), com respeito à topologia da norma.

Demonstração. Veja o Teorema 7.3.8 de [60]. □

Segue o seguinte:

Teorema 1.41. *Seja K um espaço compacto (resp. L localmente compacto) zero-dimensional. A densidade de $C(K)$ (resp. $C_0(L)$) é igual ao peso de K (resp. L).*

Demonstração. Segue facilmente do teorema anterior. □

Teorema 1.42 (Riesz [55])**.** *Seja K é um espaço compacto. Então a aplicação $T : M(K) \to C(K)^*$ dada por*

$$T(\mu)(f) = \int_K f d\mu$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Veja o Teorema 8.4.1 de [60]. □

Teorema 1.43 (Namioka, Phelps [46]). *Seja K um espaço compacto (resp. L localmente compacto). K (resp. L) é disperso se, e somente se, $C(K)$ (resp. $C_0(L)$) é um espaço de Asplund.*

Demonstração. Veja o Lema 8.6 de [15]. □

Teorema 1.44. *Se K é um espaço compacto e disperso tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, K^n é hereditariamente separável, então $C(K)$ é hereditariamente Lindelöf com respeito à topologia fraca.*

Demonstração. Segue do Lema 7.2 e dos Teoremas 7.3 e 7.4 de [48]. □

Corolário 1.45. *Seja K um espaço compacto, disperso e zero-dimensional tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, K^n é hereditariamente separável. Se $w(K) > \aleph_0$, então $C(K)$ não admite renormação Fréchet-diferenciável e não possui nenhum sistema biortogonal não-enumerável.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.44, temos que $C(K)$ é hereditariamente Lindelöf com respeito à topologia fraca. Por outro lado, segue do Teorema 1.41 que $d(C(K)) = w(K) > \aleph_0$, ou seja, $C(K)$ é um espaço de Banach não-separável e hereditariamente Lindelöf com respeito à topologia fraca. Logo, pelo Teorema 1.38, temos que $C(K)$ não admite renormação Fréchet-diferenciável e não possui nenhum sistema biortogonal não-enumerável. □

Teorema 1.46 (Todorcevic [65]). *Seja K um espaço compacto. Se $d(C(K)) > \aleph_1$, então $C(K)$ possui sistemas semi-biortogonais não-enumeráveis.*

Demonstração. Veja o Teorema 9 de [65]. □

Capítulo 2

Construindo espaços dispersos genéricos

Neste capítulo, vamos apresentar um método de construção de espaços (localmente) compactos e dispersos usando *forcing*. Ostaszewski [49] construiu, usando o princípio conjuntístico $\diamondsuit$, o primeiro exemplo de um espaço localmente compacto e disperso, de largura enumerável e altura ω_1, enumeravelmente compacto e perfeitamente normal. Há, na literatura, diversas construções de espaços similares (veja, por exemplo, [32] e [54]), todas elas respondendo a seguinte pergunta de Telgársky: existe um espaço localmente compacto e disperso, de largura enumerável e altura ω_1? Juhasz e Weiss [34] generalizaram os resultados acima citados, mostrando que para cada ordinal $\alpha < \omega_2$, existe um espaço localmente compacto e disperso de largura enumerável e altura α.

A pergunta natural que segue é se existem espaços compactos e dispersos, de largura enumerável e altura ω_2. Segue da Proposição 1.11 que a hipótese do contínuo implica que não; Just [35] mostrou que no modelo de Cohen, no qual vale a negação da hipótese do contínuo, também não existem tais espaços. Por outro lado, Baumgartner e Shelah [5] provaram, por *forcing*, que a existência de um espaço desta forma é consistente com ZFC.

Rabus [53] modificou o *forcing* utilizado em [5] para obter um espaço de *tightness* enumerável, inicialmente ω_1-compacto e não-compacto, respondendo uma pergunta de Dow e van Douwen: seu espaço é obtido retirando-se um ponto distinguido do espaço de Stone de uma álgebra de Boole introduzida por *forcing*. Em [33], Juhasz e Soukup apresentam uma construção alternativa à de Rabus e generalizam os resultados deste, usando a linguagem topológica ao invés da algébrica.

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar uma versão geral do *forcing* utilizado em [33] e mostrar algumas propriedades do espaço topológico que esse *forcing* adiciona. Começamos pela definição do *forcing*, que depende de um ordinal não-enumerável $\theta \leq \omega_2$ e de uma função f que associa subconjuntos enumeráveis de θ a pares de θ e mostramos algumas propriedades básicas do *forcing* que dependem de f. Na Seção 2.3, definimos a topologia que o *forcing* introduz sobre θ e verificamos que o espaço topológico L obtido é localmente compacto. Na seção seguinte, concluímos que $C(K)$ é um espaço de Asplund não-separável, onde K é a compactificação de Alexandroff de L.

Por fim, na Seção 2.5, mostramos dois lemas técnicos que serão chave nos capítulos subseqüentes. Em cada um deles, assumindo uma certa uniformidade entre duas condições do *forcing*, construímos uma nova amalgamação que garantirá que os espaços dos Capítulos 3 e 4 sejam hereditariamente separáveis.

2.1 O *forcing* $\mathbb{P}_f$

Definição 2.1. *Dados um ordinal não-enumerável $\theta \leq \omega_2$ e uma função $f : [\theta]^2 \to [\theta]^{\leq\aleph_0}$ tal que para quaisquer $\xi, \eta \in \theta$, $\xi \neq \eta$, $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq \min\{\xi, \eta\}$, seja $\mathbb{P}_f$ o* forcing *formado pelas condições $p = (D_p, h_p, i_p)$ onde:*

1. *$D_p \in [\theta]^{<\aleph_0}$;*
2. *$h_p : D_p \to \wp(D_p)$ e para todo $\xi \in D_p$, tem-se que $\max h_p(\xi) = \xi$;*
3. *$i_p : [D_p]^2 \to [D_p]^{<\aleph_0}$ e para todo $\xi, \eta \in D_p$, $\xi < \eta$, tem-se que:*
   - *(a) se $\xi \in h_p(\eta)$, então $h_p(\xi) \setminus h_p(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_p(\{\xi,\eta\})} h_p(\gamma)$,*
   - *(b) se $\xi \notin h_p(\eta)$, então $h_p(\xi) \cap h_p(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_p(\{\xi,\eta\})} h_p(\gamma)$,*
   - *(c) e $i_p(\{\xi, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;*

ordenado por $p \leq q$ se $D_p \supseteq D_q$, para todo $\xi \in D_q$, $h_p(\xi) \cap D_q = h_q(\xi)$ e $i_p|_{[D_q]^2} = i_q$.

Notação 2.2. *Dado $p = (D_p, h_p, i_p) \in \mathbb{P}_f$, chamamos D_p de domínio da condição p e para cada $\xi, \eta \in D_p$, $\xi < \eta$, denotamos*

$$h_p(\xi) * h_p(\eta) = \begin{cases} h_p(\xi) \setminus h_p(\eta) & \textit{se } \xi \in h_p(\eta), \\ h_p(\xi) \cap h_p(\eta) & \textit{se } \xi \notin h_p(\eta). \end{cases}$$

Observemos que com esta notação podemos reescrever as condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1 da seguinte maneira: para todo $\xi, \eta \in D_p$, $\xi < \eta$, tem-se que

$$h_p(\xi) * h_p(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_p(\{\xi,\eta\})} h_p(\gamma).$$

Note que a operação $*$ não é comutativa e também que $\xi \notin h_p(\xi) * h_p(\eta)$ de forma que $h_p(\xi) * h_p(\eta) \subseteq \xi$.

Tendo em vista a Proposição 1.25, se quisermos forçar uma topologia sobre o ordinal θ de forma a obter um espaço disperso, as condições 1 e 2 da Definição 2.1 acima são exigências naturais: para cada $\xi \in D_p$, vamos determinar, dentre os elementos de D_p, aqueles que estão na vizinhança V_ξ da caracterização, ou seja, $h_p(\xi)$ é uma aproximação finita para V_ξ.

Queremos também que a topologia introduzida sobre θ faça do espaço obtido um espaço localmente compacto, ou seja, queremos que cada vizinhança V_ξ seja compacta. Pela Proposição 1.24, precisamos daquela função i e as condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1 vão garantir que i_p é uma aproximação finita para i.

Mas para que serve, afinal, a condição 3.(c) da Definição 2.1? Pois bem: se tomamos a definição sem essa última condição, o *forcing* não tem c.c.c. e não preserva cardinais. Isso prejudicaria todo o projeto: por exemplo, não teríamos como garantir, neste caso, que θ é um ordinal não-enumerável no modelo estendido, ou seja, não teríamos que o espaço obtido é um espaço não-metrizável.

2.2 Propriedades preliminares de $\mathbb{P}_f$

Nesta capítulo, θ é um ordinal não-enumerável menor ou igual a ω_2 e $f : [\theta]^2 \to [\theta]^{\leq \aleph_0}$ é uma função tal que para quaisquer $\xi, \eta \in \theta$, $\xi \neq \eta$, $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq \min\{\xi, \eta\}$.

Lema 2.3 (Juhasz, Soukup [33])**.** *Para cada $\xi < \theta$, o conjunto $\{p \in \mathbb{P}_f : \xi \in D_p\}$ é denso em $\mathbb{P}_f$.*

Demonstração. Veja o Lema 2.2 de [33]. $\square$

Lembremos a definição da propriedade Δ:

Definição 2.4 (Baumgartner, Shelah [5])**.** *Dado um ordinal não-enumerável $\theta \leq \omega_2$, dizemos que uma função $f : [\theta]^2 \to [\theta]^{\leq \aleph_0}$ tem a propriedade Δ se para todo $\xi < \eta < \theta$, temos que $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq \xi$ e se para toda família não-enumerável A de subconjuntos finitos de θ, existem $a, b \in A$ distintos tais que para todo $\zeta \in a \cap b$, todo $\xi \in a \setminus b$ e todo $\eta \in b \setminus a$:*

(i) se $\zeta < \xi, \eta$, então $\zeta \in f(\{\xi, \eta\})$;

(ii) se $\zeta < \xi$, então $f(\{\zeta, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(iii) se $\zeta < \eta$, então $f(\{\zeta, \xi\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$.

Teorema 2.5 (Rabus [53]; Juhasz, Soukup [33])**.** *Se f tem a propriedade Δ, então $\mathbb{P}_f$ tem c.c.c.*

Demonstração. Veja o Lema 4.1 de [53] ou o Teorema 2.4 de [33]. $\square$

Segue daí (Teorema 5.10, Cap.VII, [41]) que se f tem a propriedade Δ, então o *forcing* $\mathbb{P}_f$ preserva cardinais.

Dado um subconjunto X de θ e uma condição $p \in \mathbb{P}_f$, definimos $p|_X = (D_{p|_X}, h_{p|_X}, i_{p|_X})$ da seguinte forma: $D_{p|_X} = D_p \cap X$; para cada $\xi \in D_{p|_X}$, $h_{p|_X}(\xi) = h_p(\xi) \cap X$; e para cada par $\{\xi, \eta\} \subseteq D_{p|X}$, $i_{p|_X}(\{\xi, \eta\}) = i_p(\{\xi, \eta\}) \cap X$. Convém notar que se $p \in \mathbb{P}_f$ e $X \subseteq \theta$, nem sempre vale que $p|_X \in \mathbb{P}_f$. Mas temos o seguinte:

Lema 2.6 (Rabus [53])**.** *Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_f$ e $B \subseteq \theta$ tais que $D_{p_1} \subseteq B$, $B < D_{p_2} \setminus B$ e se $\xi \in B$ e $\eta \in B \cup D_{p_2}$, então $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq B$. Se $q \in \mathbb{P}_f$ é tal que $q \leq p_1, p_2$, então $q|_{B \cup D_{p_2}} \in \mathbb{P}_f$ e $q|_{B \cup D_{p_2}} \leq p_1, p_2$.*

Demonstração. Suponhamos $p_1 = (D_1, h_1, i_1), p_2 = (D_2, h_2, i_2) \in \mathbb{P}_f$ e $B \subseteq \theta$ como na hipótese. Seja $q \in \mathbb{P}_f$, $q \leq p_1, p_2$ e vejamos que $q|_{B \cup D_2} \in \mathbb{P}_f$. É fácil ver que $q|_{B \cup D_2}$ satisfaz as condições 1, 2 e 3.(c) da Definição 2.1.

Para verificar que $q|_{B \cup D_2}$ satisfaz as condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1, fixemos $\xi, \eta \in D_q \cap (B \cup D_2)$, $\xi < \eta$.

Notemos que se $\xi \in B$ e $\eta \in B \cup D_2$, então $i_q(\{\xi, \eta\}) \subseteq B$ e, portanto, $i_{q|_{B \cup D_2}}(\{\xi, \eta\}) = i_q(\{\xi, \eta\})$. Se $\xi \in D_2 \setminus B$, então $\eta \in D_2$ e $i_q(\{\xi, \eta\}) \subseteq D_2$ e, portanto, $i_{q|_{B \cup D_2}}(\{\xi, \eta\}) = i_q(\{\xi, \eta\})$.

Tomemos $\zeta \in (h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap (B \cup D_2)$.

Caso 1. $\xi \in B$.

Neste caso, temos, por hipótese, que $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq B$. Como $q \in \mathbb{P}_f$, existe $\delta \in i_q(\{\xi, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\}) \subseteq B$ tal que $\zeta \in h_q(\delta)$. Logo, $\delta \in i_q(\{\xi, \eta\}) \cap B \subseteq i_{q|_{B \cup D_2}}(\{\xi, \eta\})$ e como $\zeta \leq \xi$, $\zeta \in B \cup D_2$ e $\xi \in B$, segue que $\zeta \in B$ e, portanto, $\zeta \in h_q(\delta) \cap B \subseteq h_{q|_{B \cup D_2}}(\delta)$.

Caso 2. $\xi \in D_2 \setminus B$.

Neste caso, temos que $i_q(\{\xi, \eta\}) = i_2(\{\xi, \eta\}) \subseteq D_2$. Logo, $i_{q|_{B \cup D_2}}(\{\xi, \eta\}) = i_q(\{\xi, \eta\})$. Como existe $\delta \in i_q(\{\xi, \eta\})$ tal que $\zeta \in h_q(\delta)$ e $\zeta \in B \cup D_2$, temos que $\zeta \in h_{q|_{B \cup D_2}}(\delta)$ e concluímos este caso.

Por fim, é fácil ver que $q|_{B \cup D_2} \leq p_1, p_2$. $\square$

O lema que acabamos de provar foi mostrado por Rabus [53] (Lema 5.3). Porém, o autor utiliza ali uma linguagem algébrica e nós optamos aqui pela linguagem topológica e por isso julgamos conveniente re-escrever a demonstração nesta linguagem.

2.3 Os espaços topológicos genéricos L e K

Fixemos a partir de agora, e até o final desse capítulo, um modelo V tal que $\theta, f \in V$ e um filtro $\mathbb{P}_f$-genérico G sobre V.

Notemos que para cada $\xi < \eta < \theta$, segue do Lema 2.3 que o conjunto $\{p \in \mathbb{P}_f : \xi, \eta \in D_p\}$ é denso em $\mathbb{P}_f$.

Definição 2.7. *Para cada* $\xi < \eta < \theta$ *seja, em* $V[G]$,

$$h(\xi) = \bigcup_{p \in G} h_p(\xi) \quad e \quad i(\{\xi, \eta\}) = \bigcup_{p \in G} i_p(\{\xi, \eta\}).$$

É fácil ver que para cada $\xi < \theta$, $\xi = \max h(\xi)$ *e que se para quaisquer* $\xi < \eta < \theta$, *denotamos*

$$h(\xi) * h(\eta) = \begin{cases} h(\xi) \setminus h(\eta) & se\ \xi \in h(\eta), \\ h(\xi) \cap h(\eta) & se\ \xi \notin h(\eta), \end{cases}$$

então $i(\{\xi, \eta\})$ *é um subconjunto finito de* ξ *tal que*

$$h(\xi) * h(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i(\{\xi, \eta\})} h(\gamma).$$

Em $V[G]$, *seja* L *o espaço topológico genérico* (θ, τ), *onde* τ *é a topologia sobre* θ *que possui o conjunto*

$$\{h(\xi) : \xi < \theta\} \cup \{L \setminus h(\xi) : \xi < \theta\}$$

como sub-base. Vamos chamar $h(\xi)$ *de vizinhança genérica de* ξ.

Temos o seguinte:

Proposição 2.8. *Em* $V[G]$, *para todo* $\xi < \theta$, $h(\xi)$ *é compacto e*

$$\{h(\xi) \setminus \bigcup_{\eta \in F} h(\eta) : F \in [\xi]^{<\aleph_0}\}$$

forma um sistema fundamental de vizinhanças abertas de ξ.

Portanto, L *é um espaço localmente compacto, disperso e zero-dimensional.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 1.24. □

Notação 2.9. *Em* $V[G]$, *denotamos a compactificação de Alexandroff de* L *por* K *e denotamos* $\{*\} = K \setminus L$.

2.4 Os espaços de Banach $C_0(L)$ e $C(K)$

Vejamos algumas das propriedades de $C_0(L)$ e de $C(K)$:

Teorema 2.10. *Em $V[G]$, L e K são espaços dispersos e, portanto, $C_0(L)$ e $C(K)$ são espaços de Asplund.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.8 que L e K são espaços dispersos e segue do Teorema 1.43 que $C_0(L)$ e $C(K)$ são espaços de Asplund. □

Teorema 2.11. *Se $\theta = \omega_1$ ou ω_2, então, em $V[G]$, L e K têm peso $|\theta|$ e, portanto, $C_0(L)$ e $C(K)$ têm densidade $|\theta|$.*

Demonstração. Para qualquer família $\mathcal{B}$ de abertos de L da forma $h(\xi) \setminus \bigcup_{\gamma \in F} h(\gamma)$, onde $F \in [\xi]^{<\aleph_0}$ e $\xi < \theta$ tal que $|\mathcal{B}| < |\theta|$, temos que $\sup \bigcup \mathcal{B} < \theta$ e, portanto, $\mathcal{B}$ não pode ser uma base para a topologia de L. Por outro lado, pela Proposição 2.8, o conjunto

$$\{h(\xi) \setminus \bigcup_{\gamma \in F} h(\gamma) : \xi < \theta, F \in [\xi]^{<\aleph_0}\}$$

é uma base topológica de L de cardinalidade $|\theta|$. Logo, o peso de L é $|\theta|$ e, como K é a compactificação de Alexandroff de L, segue do Teorema 1.5 que $w(K) = w(L) = |\theta|$.

Por fim, temos, pelo Teorema 1.41, que a densidade de $C_0(L)$ e de $C(K)$ é $|\theta|$. □

2.5 Amalgamações

Nesta seção, vamos provar dois lemas combinatórios que usaremos nos Capítulos 3 e 4. Antes disso, vamos enunciar um lema de Juhasz e Soukup [33], cuja idéia está implícita em Rabus [53] e que vamos usar no Capítulo 3:

Lema 2.12 (Rabus, [53]; Juhasz, Soukup, [33]). *Seja $t = (D_t, h_t, i_t) \in \mathbb{P}_f$, $D_t = T \cup E \cup F$, onde $T < E < F$, $E = \{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k\}$, $F = \{\alpha_i^1, \alpha_i^2 : 1 \leq i \leq k\}$, $H \subseteq T$ e:*

(i) para todo $1 \leq i \leq k$, temos que $h_t(\alpha_i^1) \cap h_t(\alpha_i^2) = \bigcup_{\xi \in H \cup E} h_t(\xi)$;

(ii) para todo $1 \leq i \leq k$ e todo $\xi \in T$, temos que $f(\{\xi, \alpha_i\}) = f(\{\xi, \alpha_i^1\}) = f(\{\xi, \alpha_i^2\})$.

Então existe $u = (D_u, h_u, i_u) \in \mathbb{P}_f$ tal que $D_u = T \cup E$ e:

(a) $u \leq t|_T$;

(b) $u \leq t|_{H \cup E}$;

(c) $T \setminus \bigcup_{\xi \in H \cup E} h_t(\xi) \subseteq h_u(\alpha_1)$.

Demonstração. Veja o Lema 2.16 de [33]. Observe que ali, $\theta = \omega_2$, mas não se usa esse fato na demonstração. $\square$

O primeiro lema combinatório que vamos provar, enunciado abaixo, tem hipóteses bastante fortes sobre duas condições do *forcing* $\mathbb{P}_f$ e, especificamente, sobre os domínios delas - a hipótese (C). Em contrapartida, garantimos a existência de uma amalgamação, uma condição mais forte que ambas, que mantém intacta uma das condições e que adiciona alguns pontos desta à vizinhança de certos pontos da outra. Pela hipótese (C), podemos chamar uma das condições de "condição menor" e a outra, de "condição maior". Nesses termos, dados um ponto x da condição menor e um ponto y da condição maior, obtemos uma amalgamação que adiciona x à vizinhança de um ponto da condição maior se, e somente se, y pertence a essa vizinhança.

Lema 2.13. *Sejam $p_1 = (D_1, h_1, i_1)$, $p_2 = (D_2, h_2, i_2) \in \mathbb{P}_f$, $\{x_1^1, \ldots, x_n^1\} \subseteq D_1 \setminus D_2$ e $\{x_1^2, \ldots, x_n^2\} \subseteq D_2 \setminus D_1$ tais que para quaisquer $1 \leq i < j \leq n$, $x_i^1 \neq x_j^1$ e $x_i^2 \neq x_j^2$. Suponha que:*

(A) se $\xi, \eta \in D_1 \cap D_2$ e $\xi \neq \eta$, então $i_1(\{\xi, \eta\}) = i_2(\{\xi, \eta\})$;

(B) se $\xi \in D_1 \cap D_2$, então $h_1(\xi) = h_2(\xi)$;

(C) $D_1 \cap D_2 < D_1 \setminus D_2 < D_2 \setminus D_1$;

(D) se $\xi \in D_1 \setminus D_2$ e $\eta \in D_2 \setminus D_1$, então $D_1 \cap \xi \subseteq f(\{\xi, \eta\})$.

Então, existe $q \leq p_1, p_2$ em $\mathbb{P}_f$ tal que, para todo $\xi \in D_2$ e todo $1 \leq i \leq n$, temos que

$$x_i^1 \in h_q(\xi) \text{ se, e somente se, } x_i^2 \in h_q(\xi).$$

Demonstração. Definamos $q = (D_q, h_q, i_q)$ da seguinte forma: $D_q = D_1 \cup D_2$;

$$h_q(\xi) = \begin{cases} h_1(\xi) & \text{se } \xi \in D_1, \\ h_2(\xi) \cup \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) \text{ e } 1 \leq i \leq n\} & \text{se } \xi \in D_2 \setminus D_1; \end{cases}$$

e

$$i_q(\{\xi, \eta\}) = \begin{cases} i_1(\{\xi, \eta\}) & \text{se } \xi, \eta \in D_1, \\ i_2(\{\xi, \eta\}) & \text{se } \xi, \eta \in D_2, \\ f(\{\xi, \eta\}) \cap D_q & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observe que (A) implica que $i_q(\{\xi, \eta\})$ está bem-definido para quaisquer $\xi, \eta \in D_1 \cap D_2$, $\xi \neq \eta$. Para os demais pares, é claro que i_q está bem-definido.

Vejamos que $q \in \mathbb{P}_f$: o fato que q satisfaz as condições 1 e 3.(c) da Definição 2.1 segue diretamente da definição de q. Vejamos que q satisfaz a condição 2 da Definição 2.1: seja $\xi \in D_q$ e considere os seguintes casos:

Caso 1. $\xi \in D_1$.

Neste caso, segue diretamente da definição de q que $h_1(\xi) = h_q(\xi)$. Como $p_1 \in \mathbb{P}_f$, temos que $\xi = \max h_1(\xi) = \max h_q(\xi)$.

Caso 2. $\xi \in D_2 \setminus D_1$.

Aqui, segue da definição de q que $h_q(\xi) \subseteq h_2(\xi) \cup D_1$ e $h_2(\xi) \subseteq h_q(\xi)$. Mas (C) implica que $D_1 < \xi$. Assim, como $p_2 \in \mathbb{P}_f$, temos que $\xi = \max h_2(\xi) = \max h_q(\xi)$.

Resta verificar que q satisfaz as condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1. Vejamos primeiramente o seguinte:

Afirmação 1. *Para todo* $\xi \in D_2$, *temos que*

$$h_q(\xi) \cap D_2 = h_2(\xi) \tag{I}$$

e

$$(II) \qquad h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2) = \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) \ \text{e}\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Demonstração da Afirmação 1. Seja $\xi \in D_2$ e considere os seguintes casos:

Caso 1. $\xi \in D_1 \cap D_2$.

Aqui, temos pela definição que $h_q(\xi) = h_1(\xi)$ e segue de (B) que $h_1(\xi) = h_2(\xi)$. Como $h_2(\xi) \subseteq D_2$, temos que

$$h_q(\xi) \cap D_2 = h_2(\xi) \cap D_2 = h_2(\xi)$$

e temos a igualdade (I). Além disso, como $h_q(\xi) = h_1(\xi) = h_2(\xi)$, temos que $h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2) = \emptyset$. Mas para cada $1 \leq i \leq n$, temos, por hipótese, que $x_i^2 \in D_2 \setminus D_1$ e, segue de (C) que $\xi < x_i^2$. Logo,

$$h_2(\xi) \cap \{x_i^2 : 1 \leq i \leq n\} = h_1(\xi) \cap \{x_i^2 : 1 \leq i \leq n\} \subseteq D_1 \cap \{x_i^2 : 1 \leq i \leq n\} = \emptyset$$

e, portanto,

$$\{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) \text{ e } 1 \leq i \leq n\} = \emptyset,$$

concluindo (II).

Caso 2. $\xi \in D_2 \setminus D_1$.

Neste caso, observe que $D_2 \cap \{x_i^1 : 1 \leq i \leq n\} = \emptyset$ e $(D_1 \setminus D_2) \cap h_2(\xi) = \emptyset$. Daí, as igualdades (I) e (II) seguem facilmente da definição de q e concluímos a demonstração da Afirmação 1.

Finalmente, provemos o seguinte:

Afirmação 2. *q satisfaz as condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1.*

Demonstração da Afirmação 2. Fixemos $\xi, \eta \in D_q$, $\xi < \eta$, e consideremos os seguintes casos:

Caso 1. $\xi, \eta \in D_1$.

Observe que, pela definição, $h_q(\xi) = h_1(\xi)$ e $h_q(\eta) = h_1(\eta)$. Assim, temos que se $\xi \in h_q(\eta)$, então $\xi \in h_1(\eta)$ e, portanto,

$$h_q(\xi) \setminus h_q(\eta) = h_1(\xi) \setminus h_1(\eta).$$

Por outro lado, se $\xi \notin h_q(\eta)$, então $\xi \notin h_1(\eta)$ e, portanto,

$$h_q(\xi) \cap h_q(\eta) = h_1(\xi) \cap h_1(\eta).$$

Logo,

$$h_q(\xi) * h_q(\eta) = h_1(\xi) * h_1(\eta).$$

Mas como $i_q(\{\xi, \eta\}) = i_1(\{\xi, \eta\}) \subseteq D_1$, segue da definição de q que para todo $\gamma \in i_q(\{\xi, \eta\})$, $h_q(\gamma) = h_1(\gamma)$. Daí, segue do fato que $p_1 \in \mathbb{P}_f$ que

$$h_q(\xi) * h_q(\eta) = h_1(\xi) * h_1(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_1(\{\xi,\eta\})} h_1(\gamma) = \bigcup_{\gamma \in i_q(\{\xi,\eta\})} h_q(\gamma).$$

Caso 2. $\xi, \eta \in D_2$.

Segue da igualdade (I) que $h_q(\xi) \cap D_2 = h_2(\xi)$ e $h_q(\eta) \cap D_2 = h_2(\eta)$. Daí, se $\xi \in h_q(\eta)$, também pela igualdade (I) temos que $\xi \in h_2(\eta)$ e, portanto,

$$(h_q(\xi) \setminus h_q(\eta)) \cap D_2 = (h_q(\xi) \cap D_2) \setminus (h_q(\eta) \cap D_2) = h_2(\xi) \setminus h_2(\eta).$$

Analogamente, se $\xi \notin h_q(\eta)$, segue da igualdade (I) que $\xi \notin h_2(\eta)$ e, portanto,

$$(h_q(\xi) \cap h_q(\eta)) \cap D_2 = (h_q(\xi) \cap D_2) \cap (h_q(\eta) \cap D_2) = h_2(\xi) \cap h_2(\eta).$$

Logo,

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_2 = h_2(\xi) * h_2(\eta).$$

Mas pela definição de q, temos que $i_q(\{\xi,\eta\}) = i_2(\{\xi,\eta\}) \subseteq D_2$. Daí, segue da definição de q que para todo $\gamma \in i_q(\{\xi,\eta\})$, $h_2(\gamma) \subseteq h_q(\gamma)$. Logo, como $p_2 \in \mathbb{P}_f$, temos que

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_2 = h_2(\xi) * h_2(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_2(\{\xi,\eta\})} h_2(\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_q(\{\xi,\eta\})} h_q(\gamma).$$

Por outro lado, segue da igualdade (II) que

$$h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2) = \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$$

e

$$h_q(\eta) \cap (D_1 \setminus D_2) = \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\eta) \text{ e } 1 \leq i \leq n\}.$$

Daí, se $\xi \in h_q(\eta)$, temos pela igualdade (I) que $\xi \in h_2(\eta)$ e, portanto,

$$(h_q(\xi) \setminus h_q(\eta)) \cap (D_1 \setminus D_2) = (h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2)) \setminus (h_q(\eta) \cap (D_1 \setminus D_2))$$

$$= \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) \text{ e } 1 \leq i \leq n\} \setminus \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\eta) \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$$

$$= \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) \setminus h_2(\eta) \text{ e } 1 \leq i \leq n\}.$$

Analogamente, se $\xi \notin h_q(\eta)$, também pela igualdade (I) temos que $\xi \notin h_2(\eta)$ e, portanto,

$$(h_q(\xi) \cap h_q(\eta)) \cap (D_1 \setminus D_2) = (h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2)) \cap (h_q(\eta) \cap (D_1 \setminus D_2))$$

$$= \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) \text{ e } 1 \leq i \leq n\} \cap \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\eta) \text{ e } 1 \leq i \leq n\}$$

$$= \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) \cap h_2(\eta) \text{ e } 1 \leq i \leq n\}.$$

Logo,

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap (D_1 \setminus D_2) = \{x_i^1 : x_i^2 \in h_2(\xi) * h_2(\eta) \text{ e } 1 \leq i \leq n\}.$$

Assim, se $\zeta \in (h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap (D_1 \setminus D_2)$, então existe $1 \leq i \leq n$ tal que $x_i^2 \in h_2(\xi) * h_2(\eta)$ e $\zeta = x_i^1$. Como $p_2 \in \mathbb{P}_f$, existe $\gamma \in i_2(\{\xi,\eta\}) = i_q(\{\xi,\eta\})$ tal que $x_i^2 \in h_2(\gamma)$. Mas $x_i^2 \in D_2 \setminus D_1$ e $x_i^2 \leq \gamma$ e, então, segue de (C) que $\gamma \in D_2 \setminus D_1$. Daí, segue da igualdade (II) que $x_i^1 \in h_q(\gamma)$ e concluímos, assim, a demonstração para este caso.

Caso 3. $\xi \in D_1 \setminus D_2$ e $\eta \in D_2 \setminus D_1$.

Neste caso, fixe $\zeta \in D_q$ tal que $\zeta \in h_q(\xi) * h_q(\eta)$. Como $\xi \in D_1$ e $\zeta < \xi$, segue de (C) que $\zeta \in D_1$. Mas segue de (D) que $\zeta \in D_1 \cap \xi \subseteq D_q \cap f(\{\xi, \eta\}) = i_q(\{\xi, \eta\})$ e, portanto,

$$\zeta \in h_q(\zeta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_q(\xi,\eta\})} h_q(\gamma),$$

concluindo a demonstração para este caso.

Observemos que (C) implica que o caso $\xi \in D_2 \setminus D_1$ e $\eta \in D_1 \setminus D_2$ não pode ocorrer, pois assumimos que $\xi < \eta$ e concluímos, assim, a demonstração da Afirmação 2 e do fato que $q \in \mathbb{P}_f$.

Finalmente, é fácil ver que $q \leq p_1$, diretamente pela definição de q. O fato que $q \leq p_2$ segue também facilmente da definição de q e da Afirmação 1.

Por fim, fixe $\xi \in D_2$ e $1 \leq i \leq n$. Como $x_i^2 \in D_2$, segue da igualdade (I) que

$$x_i^2 \in h_q(\xi) \text{ se, e somente se, } x_i^2 \in h_2(\xi).$$

Por outro lado, como $x_i^1 \in D_1 \setminus D_2$, segue da igualdade (II) que

$$x_i^1 \in h_q(\xi) \text{ se, e somente se, } x_i^2 \in h_2(\xi).$$

Portanto,

$$x_i^1 \in h_q(\xi) \text{ se, e somente se, } x_i^2 \in h_q(\xi),$$

concluindo a demonstração do resultado. □

Finalmente, chegamos ao segundo lema combinatório: queremos amalgamar duas condições numa maneira parecida à do lema anterior, pois queremos "copiar" algumas coisas que acontecem com pontos de uma condição para pontos correspondentes da outra condição. Porém, sem a hipótese (C) do lema anterior (que substituímos pela hipótese mais fraca

(D) no lema abaixo), as coisas se complicam ainda mais. Antes não precisávamos nos preocupar com pontos da condição menor que estivessem acima de pontos da maior, já que eles não existiam. Por outro lado, tendo em vista que queremos fazer algumas "cópias", a amalgamação construída no Lema 2.7 de [33] para mostrar que o *forcing* é c.c.c. também não nos ajuda, já que essa amalgamação altera as vizinhanças dos pontos o mínimo possível.

A solução que encontramos é construir uma amalgamação que aproveita metade de cada idéia (observe que aqui, pela condição (D) também está claro que podemos chamar uma das condições de "condição menor" e a outra, de "condição maior"): para os pontos da condição menor, usamos a idéia de [33], adicionando à sua vizinhança apenas os pontos da condição maior estritamente necessários; para os da maior, adicionamos à sua vizinhança os pontos da condição menor cuja "cópia" na maior pertence à sua vizinhança.

Convém notar que para obter condições satisfazendo a hipótese (D) do lema anterior (2.13) e a hipótese (E).(iii) do lema abaixo (2.14), precisaremos de uma hipótese sobre a função f que é mais forte que a propriedade Δ utilizada em [33] e [53]. As funções utilizadas nos Capítulos 3 e 4 garantirão a existência destas condições, quando necessário.

Lema 2.14. *Sejam $p_1 = (D_1, h_1, i_1)$, $p_2 = (D_2, h_2, i_2) \in \mathbb{P}_f$ duas condições tais que existe uma função bijetora $e : D_1 \to D_2$ que preserva ordem satisfazendo as seguintes condições:*

(A) se $\xi, \eta \in D_1 \cap D_2$ e $\xi \neq \eta$, então $i_1(\{\xi, \eta\}) = i_2(\{\xi, \eta\})$;

(B) se $\xi, \eta \in D_1$, então $\xi \in h_1(\eta)$ se, e somente se, $e(\xi) \in h_2(e(\eta))$;

(C) se $\xi \in D_1 \cap D_2$, então $e(\xi) = \xi$;

(D) se $\xi \in D_1$, então $\xi \leq e(\xi)$;

(E) para todo $\zeta \in D_1 \cap D_2$, todo $\xi \in D_1 \setminus D_2$ e todo $\eta \in D_2 \setminus D_1$:

(i) se $\zeta < \xi$, então $f(\{\zeta, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(ii) $D_1 \cap \xi \cap \eta \subseteq f(\{\xi, \eta\})$.

Então existe $q \in \mathbb{P}_f$, $q \leq p_1, p_2$ tal que para todo $\xi \in D_1$ e todo $\eta \in D_2$,

$$\xi \in h_q(\eta) \text{ se, e somente se, } e(\xi) \in h_2(\eta).$$

Demonstração. Para cada $\eta \in D_2 \setminus D_1$, se o conjunto $\{\delta \in D_1 \cap D_2 : \eta \in h_2(\delta)\}$ é não-vazio, defina

$$\delta_\eta = \min\{\delta \in D_1 \cap D_2 : \eta \in h_2(\delta)\}.$$

Observe que, para todo $\eta \in D_2 \setminus D_1$, se δ_η existe, então $\eta \leq \delta_\eta$, pois $\eta \in h_2(\delta_\eta)$. Como $\eta \notin D_1$ e $\delta_\eta \in D_1 \cap D_2$, temos que $\eta \neq \delta_\eta$ e, portanto, $\eta < \delta_\eta$.

Defina $q = (D_q, h_q, i_q)$ por: $D_q = D_1 \cup D_2$;

$$h_q(\xi) = \begin{cases} h_1(\xi) \cup h_2(\xi) & \text{se } \xi \in D_1 \cap D_2, \\ h_1(\xi) \cup \{\eta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\eta \text{ existe e } \delta_\eta \in h_1(\xi)\} & \text{se } \xi \in D_1 \setminus D_2, \\ h_2(\xi) \cup \{\eta \in D_1 \setminus D_2 : e(\eta) \in h_2(\xi)\} & \text{se } \xi \in D_2 \setminus D_1; \end{cases}$$

e

$$i_q(\{\xi, \eta\}) = \begin{cases} i_1(\{\xi, \eta\}) & \text{se } \xi, \eta \in D_1, \\ i_2(\{\xi, \eta\}) & \text{se } \xi, \eta \in D_2, \\ f(\{\xi, \eta\}) \cap D_q & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Notemos que (A) implica que $i_q(\{\xi, \eta\})$ está bem-definido para quaisquer $\xi, \eta \in D_1 \cap D_2$, $\xi \neq \eta$ e é claro que i_q está bem-definido para os demais pares.

Precisamos mostrar que $q \in \mathbb{P}_f$, ou seja, que q satisfaz as condições 1, 2 e 3 da Definição 2.1. O fato que q satisfaz as condições 1 e 3.(c) da Definição 2.1 segue diretamente da definição de q e do fato que $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_f$. Antes de mostrar que q satisfaz as demais condições da Definição 2.1, provemos algumas afirmações:

Afirmação 1. *Para todo $\xi \in D_1$, temos que*

$$(I) \qquad h_q(\xi) \cap D_1 = h_1(\xi)$$

e

$$(II) \qquad h_q(\xi) \cap (D_2 \setminus D_1) = \{\eta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\eta \text{ existe e } \delta_\eta \in h_1(\xi)\}.$$

Demonstração da Afirmação 1. Mostremos, primeiramente, a igualdade (I): fixe $\xi \in D_1$ e considere os seguintes casos:

Caso 1. $\xi \in D_1 \setminus D_2$.

Neste caso, como $\{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta$ existe e $\delta_\zeta \in h_1(\xi)\} \cap D_1 = \emptyset$, a igualdade (I) segue facilmente da definição de q.

Caso 2. $\xi \in D_1 \cap D_2$.

Neste caso, segue da definição de q que $h_1(\xi) \subseteq h_q(\xi)$ e segue do fato que $p_1 \in \mathbb{P}_f$ que $h_1(\xi) \subseteq D_1$. Logo, $h_1(\xi) \subseteq h_q(\xi) \cap D_1$. Para verificar a outra inclusão, seja $\eta \in h_q(\xi) \cap D_1$. Daí, $\eta \in h_1(\xi)$ ou $\eta \in h_2(\xi)$. Se $\eta \in h_1(\xi)$, concluímos a demonstração da igualdade (I). Se $\eta \in h_2(\xi) \cap D_1$, então $\eta \in D_1 \cap D_2$. Portanto, (C) implica que $e(\eta) = \eta$. Mas neste caso (C) também implica que $e(\xi) = \xi$. Daí, segue de (B) que $\eta = e(\eta) \in h_1(e(\xi)) = h_1(\xi)$, concluindo a demonstração da igualdade (I).

Mostremos agora a igualdade (II): fixe $\xi \in D_1$ e considere novamente os seguintes casos:

Caso 1. $\xi \in D_1 \setminus D_2$.

Neste caso, a igualdade (II) segue diretamente da definição de q e do fato que $h_1(\xi) \cap (D_2 \setminus D_1) = \emptyset$.

Caso 2. $\xi \in D_1 \cap D_2$.

Mostremos as duas inclusões.

Primeiramente, seja $\eta \in h_q(\xi) \cap (D_2 \setminus D_1)$. Observe que $\eta \notin h_1(\xi)$, já que $h_1(\xi) \subseteq D_1$ e $\eta \notin D_1$. Logo, $\eta \in h_2(\xi) \setminus h_1(\xi)$. Como $\xi \in D_1 \cap D_2$, temos que δ_η existe e, pela minimalidade de δ_η, $\delta_\eta \leq \xi$. Suponhamos, por absurdo, que $\delta_\eta \notin h_1(\xi)$. Então, $\delta_\eta < \xi$ e segue de (B) que $\delta_\eta \notin h_2(e(\xi))$. Lembramos que neste caso (C) implica que $e(\xi) = \xi$ e, portanto, temos que $\delta_\eta \notin h_2(\xi)$. Daí, $\eta \in h_2(\delta_\eta) \cap h_2(\xi) = h_2(\delta_\eta) * h_2(\xi)$. Logo, existe $\delta \in i_2(\{\delta_\eta, \xi\})$ tal que $\eta \in h_2(\delta)$. Mas segue de (A) que $i_1(\{\delta_\eta, \xi\}) = i_2(\{\delta_\eta, \xi\})$. Daí, como $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_f$, temos que $i_2(\{\delta_\eta, \xi\}) \subseteq D_1 \cap D_2 \cap f(\{\delta_\eta, \xi\})$. Lembrando que $f(\{\delta_\eta, \xi\}) \subseteq \min\{\delta_\eta, \xi\}$, temos que $\delta \in D_1 \cap D_2 \cap \delta_\eta$. Assim, temos que $\eta \in h_2(\delta)$, $\delta \in D_1 \cap D_2$ e $\delta < \delta_\eta$, contradizendo a minimalidade de δ_η.

Seja, agora, $\eta \in D_2 \setminus D_1$ tal que δ_η existe e $\delta_\eta \in h_1(\xi)$. Temos duas possibilidades: $\delta_\eta = \xi$ ou $\delta_\eta < \xi$. Se $\delta_\eta = \xi$, temos que $\eta \in h_2(\delta_\eta) = h_2(\xi)$ e concluímos a demonstração. Se

$\delta_\eta < \xi$, segue de (B) que $\delta_\eta \in h_2(e(\xi))$. Lembramos que (C) implica que $e(\xi) = \xi$ e, portanto, temos que $\delta_\eta \in h_2(\xi)$. Então, $h_2(\delta_\eta) * h_2(\xi) = h_2(\delta_\eta) \setminus h_2(\xi)$. Suponhamos, por absurdo, que $\eta \notin h_2(\xi)$. Logo, $\eta \in h_2(\delta_\eta) * h_2(\xi)$ e daí, existe $\delta \in i_2(\{\delta_\eta, \xi\})$ tal que $\eta \in h_2(\delta)$. Novamente, segue de (A) que $i_2(\{\delta_\eta, \xi\}) \subseteq D_1 \cap D_2 \cap \delta_\eta$ e, portanto, $\delta \in D_1 \cap D_2 \cap \delta_\eta$. Assim, temos que $\eta \in h_2(\delta)$, $\delta \in D_1 \cap D_2$ e $\delta < \delta_\eta$, contradizendo a minimalidade de δ_η.

Concluímos, assim, a demonstração deste caso, da igualdade (II) e da Afirmação 1.

Mostremos agora uma afirmação correspondente à Afirmação 1, mas para $\xi \in D_2$:

Afirmação 2. *Para todo $\xi \in D_2$, temos que*

$$h_q(\xi) \cap D_2 = h_2(\xi) \tag{III}$$

e

$$h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2) = \{\eta \in D_1 \setminus D_2 : e(\eta) \in h_2(\xi)\}. \tag{IV}$$

Demonstração da Afirmação 2. Mostremos primeiramente a igualdade (III): fixe $\xi \in D_2$ e considere os seguintes casos:

Caso 1. $\xi \in D_2 \setminus D_1$.

Neste caso, a igualdade (III) segue diretamente da definição de q e do fato que $\{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\xi)\} \cap D_2 = \emptyset$.

Caso 2. $\xi \in D_1 \cap D_2$.

Neste caso, segue da definição de q e do fato que $h_2(\xi) \subseteq D_2$ que $h_2(\xi) \subseteq h_q(\xi) \cap D_2$. Para mostrar a outra inclusão, fixe $\eta \in h_q(\xi) \cap D_2$ e temos então que $\eta \in h_1(\xi)$ ou $\eta \in h_2(\xi)$. Se $\eta \in h_2(\xi)$, concluímos a demonstração da igualdade (III). Se $\eta \in h_1(\xi) \cap D_2$, temos que $\eta \in h_1(\xi) \cap D_2 \subseteq D_1 \cap D_2$. Daí, (C) implica que $e(\eta) = \eta$. Mas (C) também implica que $e(\xi) = \xi$. Segue então do fato que $\eta \in h_1(\xi)$ e de (B) que $\eta = e(\eta) \in h_2(e(\xi)) = h_2(\xi)$, concluindo a demonstração da igualdade (III).

Mostremos, finalmente, a igualdade (IV): fixe $\xi \in D_2$ e considere os seguintes casos:

Caso 1. $\xi \in D_2 \setminus D_1$.

Neste caso, a igualdade (III) segue diretamente da definição de q e do fato que $h_2(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2) = \emptyset$.

Caso 2. $\xi \in D_1 \cap D_2$.

Neste caso, segue de (C) que $e(\xi) = \xi$. Tomemos $\eta \in D_1 \setminus D_2$. Daí, se $\eta \in h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2)$, como $h_2(\xi) \subseteq D_2$, temos que $\eta \in h_1(\xi)$ e, segue de (B), que $e(\eta) \in h_2(e(\xi)) = h_2(\xi)$. Por outro lado, se $e(\eta) \in h_2(\xi)$, segue novamente de (B) que $\eta \in h_1(\xi)$ e concluímos a demonstração deste caso, da igualdade (IV) e da Afirmação 2.

Voltemos agora à demonstração do lema. Lembramos que para mostrar que $q \in \mathbb{P}_f$, resta mostrar que q satisfaz as condições 2, 3.(a) e 3.(b) da Definição 2.1.

Afirmação 3. *q satisfaz a condição 2 da Definição 2.1.*

Demonstração da Afirmação 3. Fixe $\xi \in D_q$ e considere os seguintes casos:

Caso 1. $\xi \in D_1$.

Seja $\eta \in h_q(\xi)$. Pela Afirmação 1, temos que $\eta \in h_1(\xi)$ ou $\eta \in D_2 \setminus D_1$ e $\delta_\eta \in h_1(\xi)$. Se $\eta \in h_1(\xi)$, como $p_1 \in \mathbb{P}_f$, temos que $\eta \leq \max h_1(\xi) = \xi$. Se $\eta \in D_2 \setminus D_1$ e $\delta_\eta \in h_1(\xi)$, então $\eta \leq \delta_\eta \leq \xi$. Como $\xi \in h_1(\xi) \subseteq h_q(\xi)$, segue que $\xi = \max h_q(\xi)$.

Caso 2. $\xi \in D_2 \setminus D_1$.

Seja $\eta \in h_q(\xi)$. Pela Afirmação 2, temos que $\eta \in h_2(\xi)$ ou $\eta \in D_1 \setminus D_2$ e $e(\eta) \in h_2(\xi)$. Se $\eta \in h_2(\xi)$, como $p_2 \in \mathbb{P}_f$, temos que $\eta \leq \max h_2(\xi) = \xi$. Se $\eta \in D_1 \setminus D_2$ e $e(\eta) \in h_2(\xi)$, então segue de (D) que $\eta \leq e(\eta) \leq \xi$. Como $\xi \in h_2(\xi) \subseteq h_q(\xi)$, segue que $\xi = \max h_q(\xi)$.

Concluímos, assim, a demonstração da Afirmação 3.

Para concluir que $q \in \mathbb{P}_f$, resta provar que q satisfaz as condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1:

Afirmação 4. *q satisfaz as condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1.*

Demonstração da Afirmação 4. Sejam $\xi, \eta \in D_q$, $\xi < \eta$ e consideremos os seguintes casos:

Caso 1. $\xi, \eta \in D_1$.

Neste caso, segue da igualdade (I) que $h_q(\eta) \cap D_1 = h_1(\eta)$ e $h_q(\xi) \cap D_1 = h_1(\xi)$.

Assim, se $\xi \in h_q(\eta)$, então

$$(h_q(\xi) \setminus h_q(\eta)) \cap D_1 = (h_q(\xi) \cap D_1) \setminus (h_q(\eta) \cap D_1) = h_1(\xi) \setminus h_1(\eta).$$

Por outro lado, se $\xi \notin h_q(\eta)$, então

$$(h_q(\xi) \cap h_q(\eta)) \cap D_1 = (h_q(\xi) \cap D_1) \cap (h_q(\eta) \cap D_1) = h_1(\xi) \cap h_1(\eta).$$

Como, também pela igualdade (I), $\xi \in h_q(\eta)$ se, e somente se, $\xi \in h_1(\eta)$, segue que $(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_1 = h_1(\xi) * h_1(\eta)$. Daí, como $i_1(\{\xi, \eta\}) = i_q(\{\xi, \eta\})$ e para todo $\gamma \in D_1$ temos que $h_1(\gamma) \subseteq h_q(\gamma)$, segue do fato que $p_1 \in \mathbb{P}_f$ que

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_1 = h_1(\xi) * h_1(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_1(\{\xi,\eta\})} h_1(\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_q(\{\xi,\eta\})} h_q(\gamma).$$

Além disso, segue da igualdade (II) que

$$h_q(\xi) \cap (D_2 \setminus D_1) = \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\xi)\}$$

e

$$h_q(\eta) \cap (D_2 \setminus D_1) = \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\eta)\}.$$

Assim, se $\xi \in h_q(\eta)$, então

$$(h_q(\xi) \setminus h_q(\eta)) \cap (D_2 \setminus D_1) = (h_q(\xi) \cap (D_2 \setminus D_1)) \setminus (h_q(\eta) \cap (D_2 \setminus D_1))$$

$$= \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\xi)\} \setminus \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\eta)\}$$

$$= \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\xi) \setminus h_1(\eta)\}$$

Por outro lado, se $\xi \notin h_q(\eta)$, então

$$(h_q(\xi) \cap h_q(\eta)) \cap (D_2 \setminus D_1) = (h_q(\xi) \cap (D_2 \setminus D_1)) \cap (h_q(\eta) \cap (D_2 \setminus D_1))$$

$$= \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\xi)\} \cap \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\eta)\}$$

$$= \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\xi) \cap h_1(\eta)\}$$

Como, pela igualdade (I), $\xi \in h_q(\eta)$ se, e somente se, $\xi \in h_1(\eta)$, segue que

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap (D_2 \setminus D_1) = \{\zeta \in D_2 \setminus D_1 : \delta_\zeta \text{ existe e } \delta_\zeta \in h_1(\xi) * h_1(\eta)\}.$$

Daí, se $\zeta \in (h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_2 \setminus D_1$, então δ_ζ existe e existe $\gamma \in i_1(\{\xi, \eta\}) = i_q(\{\xi, \eta\})$ tal que $\delta_\zeta \in h_1(\gamma)$. Como $\gamma \in i_1(\{\xi, \eta\}) \subseteq D_1$, segue da igualdade (II) que $\zeta \in h_q(\gamma)$. Ou seja, temos que

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_2 \setminus D_1 \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_q(\{\xi,\eta\})} h_q(\gamma)$$

e concluímos a demonstração das condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1 para este caso.

Caso 2. $\xi, \eta \in D_2$.

Segue da igualdade (III) que $h_q(\eta) \cap D_2 = h_2(\eta)$ e $h_q(\xi) \cap D_2 = h_2(\xi)$.

Assim, se $\xi \in h_q(\eta)$, então

$$(h_q(\xi) \setminus h_q(\eta)) \cap D_2 = (h_q(\xi) \cap D_2) \setminus (h_q(\eta) \cap D_2) = h_2(\xi) \setminus h_2(\eta).$$

Por outro lado, se $\xi \notin h_q(\eta)$, então

$$(h_q(\xi) \cap h_q(\eta)) \cap D_2 = (h_q(\xi) \cap D_2) \cap (h_q(\eta) \cap D_2) = h_2(\xi) \cap h_2(\eta).$$

Como, também pela igualdade (III), $\xi \in h_q(\eta)$ se, e somente se, $\xi \in h_2(\eta)$, segue que $(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_2 = h_2(\xi) * h_2(\eta)$. Daí, como $i_2(\{\xi, \eta\}) = i_q(\{\xi, \eta\})$ e para todo $\gamma \in D_2$

temos que $h_2(\gamma) \subseteq h_q(\gamma)$, segue do fato que $p_2 \in \mathbb{P}_f$ que

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_2 = h_2(\xi) * h_2(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_2(\{\xi,\eta\})} h_2(\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_q(\{\xi,\eta\})} h_q(\gamma).$$

Além disso, segue da igualdade (IV) que

$$h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2) = \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\xi)\}$$

e

$$h_q(\eta) \cap (D_1 \setminus D_2) = \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\eta)\}.$$

Assim, se $\xi \in h_q(\eta)$, então

$$(h_q(\xi) \setminus h_q(\eta)) \cap (D_1 \setminus D_2) = (h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2)) \setminus (h_q(\eta) \cap (D_1 \setminus D_2))$$

$$= \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\xi)\} \setminus \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\eta)\}$$

$$= \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\xi) \setminus h_2(\eta)\}$$

Por outro lado, se $\xi \notin h_q(\eta)$, então

$$(h_q(\xi) \cap h_q(\eta)) \cap (D_1 \setminus D_2) = (h_q(\xi) \cap (D_1 \setminus D_2)) \cap (h_q(\eta) \cap (D_1 \setminus D_2))$$

$$= \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\xi)\} \cap \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\eta)\}$$

$$= \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\xi) \cap h_2(\eta)\}$$

Como, também pela igualdade (III), $\xi \in h_q(\eta)$ se, e somente se, $\xi \in h_2(\eta)$, segue que

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap (D_1 \setminus D_2) = \{\zeta \in D_1 \setminus D_2 : e(\zeta) \in h_2(\xi) * h_2(\eta)\}.$$

Daí, se $\zeta \in (h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_1 \setminus D_2$, existe $\gamma \in i_2(\{\xi,\eta\}) = i_q(\{\xi,\eta\})$ tal que $e(\zeta) \in h_2(\gamma)$. Como $\gamma \in i_2(\{\xi,\eta\}) \subseteq D_2$, segue da igualdade (IV) que $\zeta \in h_q(\gamma)$. Portanto, temos que

$$(h_q(\xi) * h_q(\eta)) \cap D_1 \setminus D_2 \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_q(\{\xi,\eta\})} h_q(\gamma)$$

e concluímos a demonstração das condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1 para este caso.

Caso 3. $\xi \in D_1 \setminus D_2$ *e* $\eta \in D_2 \setminus D_1$.

Fixemos $\zeta \in h_q(\xi) * h_q(\eta)$ e consideremos os seguintes subcasos:

Subcaso 3.1. $\zeta \in D_1$.

Aqui, temos que $\zeta \in D_1 \cap \xi \cap \eta$ e, por (E).(ii), temos que $\zeta \in f(\{\xi, \eta\})$. Como $\zeta \in D_1 \subseteq D_q$, segue da definição de q que $\zeta \in i_q(\{\xi, \eta\})$. Portanto, tomando $\gamma = \zeta$ temos que $\zeta \in h_q(\gamma)$ e $\gamma \in i_q(\{\xi, \eta\})$.

Subcaso 3.2. $\zeta \in D_2 \setminus D_1$.

Neste caso, segue da igualdade (II) que δ_ζ existe e $\delta_\zeta \in h_1(\xi)$. Logo, $\delta_\zeta \in D_1 \cap \xi \cap \eta$ e, novamente segue de (E).(ii) que $\delta_\zeta \in f(\{\xi, \eta\}) \cap D_q = i_q(\{\xi, \eta\})$. Daí, pela definição de δ_ζ temos que $\zeta \in h_2(\delta_\zeta) \subseteq h_q(\delta_\zeta)$. Tomando $\gamma = \delta_\zeta$, temos que $\zeta \in h_q(\gamma)$ e $\gamma \in i_q(\{\xi, \eta\})$, concluindo a demonstração para este caso.

Caso 4. $\xi \in D_2 \setminus D_1$ *e* $\eta \in D_1 \setminus D_2$.

Novamente, fixemos $\zeta \in h_q(\xi) * h_q(\eta)$ e consideremos os seguintes subcasos:

Subcaso 4.1. $\zeta \in D_1$.

Temos aqui que $\zeta \in D_1 \cap \xi \cap \eta$ e, segue de (E).(ii) que $\zeta \in f(\{\xi, \eta\})$. Como $\zeta \in D_1 \subseteq D_q$, segue da definição de q que $\zeta \in i_q(\{\xi, \eta\})$. Assim, para $\gamma = \zeta$ temos que $\zeta \in h_q(\gamma)$ e $\gamma \in i_q(\{\xi, \eta\})$.

Subcaso 4.2. $\zeta \in D_2 \setminus D_1$.

Comecemos este subcaso provando o seguinte:

Observação 1. *O conjunto* $\{\delta_\zeta, \delta_\xi\}$ *é não-vazio,* $\min\{\delta_\zeta, \delta_\xi\} < \eta$ *e, se* δ_ζ *e* δ_ξ *existem, então* $\delta_\zeta \neq \delta_\xi$.

Demonstração da Observação 1. Primeiramente, observe que, pela definição da operação $*$, temos que se $\xi \notin h_q(\eta)$, então $\zeta \in h_q(\xi) * h_q(\eta) = h_q(\xi) \cap h_q(\eta)$ e, portanto, $\zeta \in h_q(\eta)$. Analogamente, se $\xi \in h_q(\eta)$, então $\zeta \in h_q(\xi) * h_q(\eta) = h_q(\xi) \setminus h_q(\eta)$ e, portanto, $\zeta \notin h_q(\eta)$.

Ou seja,

$$|\{\zeta, \xi\} \cap h_q(\eta)| = 1.$$

Daí, como neste subcaso temos que $\{\zeta, \xi\} \subseteq D_2 \setminus D_1$ e $\eta \in D_1 \setminus D_2$, segue da igualdade (II) que

$$|\{\delta_\zeta, \delta_\xi\} \cap h_1(\eta)| = 1$$

e, portanto, o conjunto $\{\delta_\zeta, \delta_\xi\}$ é não-vazio.

Daí, observe que

$$\min\{\delta_\zeta, \delta_\xi\} \leq \min(\{\delta_\zeta, \delta_\xi\} \cap h_1(\eta)) \leq \eta.$$

Como $\min\{\delta_\zeta, \delta_\xi\} \in D_1 \cap D_2$, por definição e estamos no caso em que $\eta \notin D_2$, segue que $\min\{\delta_\zeta, \delta_\xi\} < \eta$.

Finalmente, como vimos que $\zeta \in h_q(\eta)$ se, e somente se, $\xi \notin h_q(\eta)$, então, se δ_ζ e δ_ξ existem, segue que $\delta_\zeta \in h_1(\eta)$ se, e somente se, $\delta_\xi \notin h_1(\eta)$, de forma que $\delta_\zeta \neq \delta_\xi$, concluindo a demonstração da Observação 1.

Consideremos $\delta = \min\{\delta_\xi, \delta_\eta\}$ e observe que, como $\delta \in D_1 \cap D_2$ e $\xi \notin D_1$, temos que $\delta \neq \xi$. Daí temos as seguintes opções:

Subcaso 4.2.1. $\delta < \xi$.

Aqui temos que $\delta \neq \delta_\xi$. Portanto, δ_ζ existe e $\delta_\zeta = \delta \in D_1 \cap \xi \cap \eta$. Por (E).(ii), temos que $\delta_\zeta \in f(\{\xi, \eta\}) \cap D_q = i_q(\{\xi, \eta\})$. Mas, pela definição de δ_ζ, $\zeta \in h_2(\delta_\zeta) \subseteq h_q(\delta_\zeta)$. Assim, para $\gamma = \delta_\zeta$, temos que $\zeta \in h_q(\gamma)$ e $\gamma \in i_q(\{\xi, \eta\})$, como queríamos.

Subcaso 4.2.2. $\delta > \xi$.

Neste caso, pela igualdade (III), como $\zeta \in h_q(\xi) * h_q(\eta) \subseteq h_q(\xi)$ e $\zeta, \xi \in D_2 \setminus D_1$, temos que $\zeta \in h_2(\xi)$. Mostremos o seguinte:

Observação 2. $\zeta \in h_2(\xi) * h_2(\delta)$**.**

Demonstração da Observação 2. Primeiramente, suponhamos que $\delta = \delta_\xi$. Daí, se δ_ζ também existe, então $\delta_\xi < \delta_\zeta$ e segue da minimalidade de δ_ζ que $\zeta \notin h_2(\delta_\xi)$; é claro que se δ_ζ não existe, então $\zeta \notin h_2(\delta_\xi)$. Mas pela definição de δ_ξ, temos que $\xi \in h_2(\delta_\xi)$. Logo,

$h_2(\xi) * h_2(\delta_\xi) = h_2(\xi) \setminus h_2(\delta_\xi)$ e, portanto, $\zeta \in h_2(\xi) \setminus h_2(\delta_\xi) = h_2(\xi) * h_2(\delta)$.

Agora, suponhamos que $\delta = \delta_\zeta$. Daí, se δ_ξ também existe, então $\delta_\zeta < \delta_\xi$ e segue da minimalidade de δ_ξ que $\xi \notin h_2(\delta_\zeta)$; é claro que se δ_ξ não existe, então $\xi \notin h_2(\delta_\zeta)$. Mas pela definição de δ_ζ, temos que $\zeta \in h_2(\delta_\zeta)$. Logo, $h_2(\xi) * h_2(\delta_\zeta) = h_2(\xi) \cap h_2(\delta_\zeta)$ e, portanto, $\zeta \in h_2(\xi) \cap h_2(\delta_\zeta) = h_2(\xi) * h_2(\delta)$, concluindo a demonstração da Observação 2.

Finalmente, como $p_2 \in \mathbb{P}_f$, existe $\gamma \in i_2(\{\xi, \delta\})$ tal que $\zeta \in h_2(\gamma) \subseteq h_q(\gamma)$ e, por (E).(i), temos que:

$$i_2(\{\xi, \delta\}) \subseteq f(\{\xi, \delta\}) \cap D_2 \subseteq f(\{\xi, \eta\}) \cap D_q = i_q(\{\xi, \eta\}).$$

Logo, $\gamma \in i_q(\{\xi, \delta\})$ e $\zeta \in h_q(\gamma)$, concluindo a demonstração do Caso 4, da Afirmação 4 e do fato que $q \in \mathbb{P}_f$.

Agora, segue facilmente da definição de q e da Afirmação 1 que $q \leq p_1$. Analogamente, segue da definição de q e da Afirmação 2 que $q \leq p_2$.

Por fim, verificamos que q satisfaz a condição que queremos: sejam $\xi \in D_1$ e $\eta \in D_2$. Temos mais uma vez os seguintes casos:

Caso 1. $\xi \in D_1 \cap D_2$.

Neste caso, (C) implica que $e(\xi) = \xi$. Daí, segue da igualdade (III) que $\xi \in h_q(\eta)$ se, e somente se, $e(\xi) = \xi \in h_2(\eta)$.

Caso 2. $\xi \in D_1 \setminus D_2$.

Neste caso, segue diretamente da igualdade (IV) que $\xi \in h_q(\eta)$ se, e somente se $e(\xi) \in h_2(\eta)$, e concluímos, desta forma, a demonstração do lema. $\square$

Capítulo 3

Um espaço de Asplund e suas propriedades topológicas

Neste capítulo, vamos estudar as propriedades dos espaços K_1 e $C(K_1)$:

Definição 3.1. *Fixemos um modelo V e sejam $\theta = \omega_1$ e $f : [\omega_1]^2 \to [\omega_1]^{\leq \aleph_0}$ dada por $f(\{\xi, \eta\}) = \min\{\xi, \eta\}$. Fixemos um filtro $\mathbb{P}_f$-genérico G sobre V. Vamos chamar de L_1 o espaço da Definição 2.7 correspondente ao* forcing *$\mathbb{P}_f$.*

Observe que f tem a propriedade Δ e, portanto, segue do Teorema 2.5 que $\mathbb{P}_f$ é c.c.c. e, portanto, preserva cardinais. Segue da Proposição 2.8 que L_1 é localmente compacto.

Notação 3.2. *Vamos chamar de K_1 a compactificação de Alexandroff de L_1.*

Segue dos Teoremas 2.10 e 2.11 que L_1 e K_1 são dispersos de peso $\aleph_1$ e, portanto, $C_0(L_1)$ e $C(K_1)$ são espaços de Asplund de densidade $\aleph_1$.

Vamos começar mostrando, na Seção 3.1, que (qualquer potência finita de) K_1 é hereditariamente separável. Para isso, vamos usar a amalgamação construída no Lema 2.13. Daí, segue que $C(K_1)$ é um espaço de Asplund de densidade $\aleph_1$ que não admite renormação Fréchet-diferenciável e não possui um sistema biortogonal não-enumerável.

Na Seção 3.2, mostramos uma proposição sobre a convergência na topologia fraca* de seqüências de $C(K_1)^*$, que é uma modificação do Lema 5.4 de Rabus [53]: aqui, o *forcing* $\mathbb{P}_f$

introduz uma topologia sobre ω_1, enquanto que em [53], sobre ω_2. Por outro lado, mostramos um resultado sobre convergência de medidas de Radon sobre o espaço K_1, enquanto que em [53] são considerados apenas pontos do espaço.

Finalmente, na Seção 3.3, usamos o resultado da seção anterior para dar um novo exemplo de um espaço que tem (C) e não tem (E). Podemos dizer, em linhas gerais, que a propriedade (C) é uma versão convexa da propriedade de Lindelöf e a propriedade (E), por sua vez, é uma versão convexa da seqüencialidade. A primeira foi introduzida por Corson [12] e a segunda, por Efremov [18]. O primeiro exemplo de um espaço que tem (C) e não tem (E) é uma modificação feita por Justin T. Moore (não publicada) do espaço de Ostaszewski [49] (assumindo, portanto, o princípio $\diamondsuit$).

3.1 Separabilidade hereditária

Teorema 3.3. *Em $V[G]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que K_1^n é hereditariamente separável.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução em $n \in \mathbb{N}$: fixemos $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que para todo $0 \leq i < n$, K_1^i é hereditariamente separável (convencionamos $K_1^0 = \{*\} = K_1 \setminus L_1$). Mostremos que K_1^n é hereditariamente separável. Para isso, pela Proposição 1.10, basta mostrar que K_1^n não possui seqüências separadas à esquerda de cardinalidade $\aleph_1$.

Em V, suponha que $(\dot{x}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma seqüência de nomes tal que $\mathbb{P}_f$ força que $(\dot{x}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma seqüência de K_1^n, separada à esquerda e de cardinalidade $\aleph_1$ e que para cada $\alpha < \omega_1$, temos que $\dot{x}_\alpha = (\dot{x}_1^\alpha, \ldots, \dot{x}_n^\alpha)$, onde cada $\dot{x}_i^\alpha$ é um nome para um elemento de K_1.

Observe que se

$$\mathbb{P}_f \Vdash \exists 1 \leq i \leq n,\ \exists X \subseteq \omega_1,\ |X| = \aleph_1 \text{ tal que } \forall \alpha, \beta \in X,\ \dot{x}_i^\alpha = \dot{x}_i^\beta,$$

então

$$\mathbb{P}_f \Vdash \exists 1 \leq i \leq n,\ \exists X \subseteq \omega_1,\ |X| = \aleph_1 \text{ tal que } ((\dot{x}_1^\alpha, \ldots, \dot{x}_{i-1}^\alpha, \dot{x}_{i+1}^\alpha, \ldots, \dot{x}_n^\alpha))_{\alpha\in X}$$

$$\text{é uma seqüência separada à esquerda em } K_1^{n-1},$$

contradizendo a hipótese indutiva. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathbb{P}_f$ força que para todo $1 \leq i \leq n$ e todo $\alpha < \beta < \omega_1$, $\dot{x}_i^\alpha \neq \dot{x}_i{}^\beta$ e $\dot{x}_i^\alpha \in L_1 = K_1 \setminus \{*\}$.

Daí, para cada $\alpha < \omega_1$, existem $\dot{F}_1^\alpha, \ldots, \dot{F}_n^\alpha$ nomes para subconjuntos finitos de ω_1 tais que $\mathbb{P}_f$ força que

$$\forall \alpha < \omega_1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i^\alpha \in h(\dot{x}_i^\alpha) \setminus \bigcup_{\xi \in \dot{F}_i^\alpha} h(\xi)$$

e

$$\forall \alpha < \beta < \omega_1 \quad \exists 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i^\alpha \notin h(\dot{x}_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in \dot{F}_i^\beta} h(\xi).$$

Para cada $\alpha < \omega_1$, sejam $p_\alpha = (D_\alpha, h_\alpha, i_\alpha) \in \mathbb{P}_f$, $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha \in \omega_1$ e $F_1^\alpha, \ldots, F_n^\alpha \subseteq \omega_1$ finitos tais que

$$p_\alpha \Vdash \forall 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i^\alpha = \check{x}_i^\alpha \text{ e } \dot{F}_i^\alpha = \check{F}_i^\alpha.$$

Pelo Lema 2.3, podemos assumir, sem perda de generalidade, que para todo $\alpha < \omega_1$ e todo $1 \leq i \leq n$, $F_i^\alpha \subseteq D_\alpha$ e $x_i^\alpha \in D_\alpha$. Pelo Lema 1.3, podemos também assumir que $(D_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ forma um Δ-sistema de raiz D tal que para todo $\alpha < \beta < \omega_1$, $D < D_\alpha \setminus D < D_\beta \setminus D$. Como, para cada $\xi \in D$ e cada $\alpha < \omega_1$, temos que $h_\alpha(\xi) \subseteq \xi \cap D_\alpha \subseteq D$, podemos supor que, para todo $\xi \in D$ e todo $\alpha < \beta < \omega_1$, $h_\alpha(\xi) = h_\beta(\xi)$. De forma análoga, para cada par $\{\xi, \eta\} \subseteq D$ e cada $\alpha < \omega_1$, temos que $i_\alpha(\{\xi, \eta\}) \in [f(\{\xi, \eta\})]^{<\aleph_0}$ e podemos supor então que, para todo par $\{\xi, \eta\} \subseteq D$ e todo $\alpha < \beta < \omega_1$, $i_\alpha(\{\xi, \eta\}) = i_\beta(\{\xi, \eta\})$. Finalmente, observe que podemos supor que, para todo $1 \leq i \leq n$, tem-se que: ou $x_i^\alpha = x_i^\beta$ para todo $\alpha < \beta < \omega_1$, ou $x_i^\alpha \notin D$ para todo $\alpha < \omega_1$. Além disso, suponha, sem perda de generalidade, que para todo $1 \leq i < j \leq n$ e todo $\alpha < \beta < \omega_1$, $x_i^\alpha = x_j^\alpha$ se, e somente se $x_i^\beta = x_j^\beta$.

Sejam $\alpha < \beta < \omega_1$ e observe que p_α, p_β, $\{x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha\} \setminus D$ e $\{x_1^\beta, \ldots, x_n^\beta\} \setminus D$ satisfazem as condições (A), (B), (C) e (D) do Lema 2.13. Logo, existe $q \leq p_\alpha, p_\beta$ em $\mathbb{P}_f$ tal que, para todo $\xi \in D_\beta$ e todo $1 \leq i \leq n$, se $x_i^\alpha \notin D$, então

$$x_i^\alpha \in h_q(\xi) \text{ se, e somente se, } x_i^\beta \in h_q(\xi).$$

Como $q \leq p_1, p_2$, temos que

$$q \Vdash \forall 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i^\alpha = \check{x}_i^\alpha,\ \dot{x}_i^\beta = \check{x}_i^\beta,\ \dot{F}_i^\alpha = \check{F}_i^\alpha,\ \dot{F}_i^\beta = \check{F}_i^\beta.$$

Mas, para cada $1 \leq i \leq n$, se $x_i^\alpha \in D$, então $x_i^\beta = x_i^\alpha$ e daí,

$$q \Vdash \dot{x}_i^\alpha = \check{x}_i^\alpha = \check{x}_i^\beta = \dot{x}_i^\beta,$$

contradizendo o fato que assumimos que $\mathbb{P}_f$ força que $\dot{x}_i^\alpha = \dot{x}_i^\beta$,. Logo, para todo $1 \leq i \leq n$, $x_i^\alpha \notin D$. Como

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ x_i^\beta \in h_\beta(x_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in F_i^\beta} h_\beta(\xi)$$

e $F_i^\beta \cup \{x_i^\beta\} \subseteq D_\beta$, segue que

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ x_i^\alpha \in h_\beta(x_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in F_i^\beta} h_\beta(\xi),$$

ou seja,

$$q \Vdash \forall 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i^\alpha = \check{x}_i^\alpha \in h(\check{x}_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in \check{F}_i^\beta} h(\xi) = h(\dot{x}_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in \dot{F}_i^\beta} h(\xi),$$

contradizendo a hipótese e concluindo a demonstração. □

Para terminar esta seção, temos as seguintes conseqüências sobre o espaço de Banach $C(K_1)$:

Teorema 3.4. *Em $V[G]$, $C(K_1)$ não admite renormação Fréchet-diferenciável e não contém nenhum sistema biortogonal não-enumerável.*

Demonstração. Segue do Teorema 3.3 que $hd(K_1^n) = \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, pelo Teorema 2.11, temos que $w(K_1) = \aleph_1$. Daí, segue do Corolário 1.45 que $C(K_1)$ não admite renormação Fréchet-diferenciável e não contém nenhum sistema biortogonal não-enumerável. □

3.2 Convergência de seqüências na topologia fraca*

Vejamos agora um resultado sobre a convergência de seqüências de $C(K_1)^*$ com respeito à topologia fraca*. Observe que segue do resultado abaixo que, em particular, não existe uma seqüência de pontos de L_1 que converge para $*$ em K_1.

Proposição 3.5. *Em* $V[G]$*, se* $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{C(K_1)^*}$ *é uma seqüência que converge para* δ_* *com respeito à topologia fraca***, então existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq n_0$*, tem-se que* $\mu_n(\{*\}) \neq 0$*.*

Demonstração. Senão, existe, em $V[G]$, uma seqüência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{C(K_1)^*}$ que converge para δ_* com respeito à topologia fraca* e tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $\mu_n(\{*\}) = 0$.

Em V, fixe $0 < \varepsilon < \frac{1}{5}$ e sejam $\dot{\delta}_*$ um nome para δ_* e $(\dot{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de nomes para elementos de $B_{C(K_1)^*}$, tais que

$$\mathbb{P}_f \Vdash \forall n \in \mathbb{N},\ \dot{\mu}_n(\{*\}) = 0 \text{ e } (\dot{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge para } \dot{\delta}_* \text{ com respeito à topologia fraca}^*.$$

Daí, segue do Teorema 1.27 que

$$\mathbb{P}_f \Vdash \forall n \in \mathbb{N},\ \exists F_n \subseteq K_1 \setminus \{*\} = L_1 \text{ tal que } |\dot{\mu}_n|(K_1 \setminus F_n) < \check{\varepsilon}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja A_n uma anticadeia maximal em $\mathbb{P}_f$ tal que para cada $p \in A_n$, existe um subconjunto finito F_n^p de ω_1 tal que p força que $|\dot{\mu}_n|(K_1 \setminus \check{F}_n^p) < \check{\varepsilon}$ e para cada $\alpha \in F_n^p$, existe $a_\alpha \in \mathbb{R}$ tal que p força que $\dot{\mu}_n(\{\check{\alpha}\}) = \check{a}_{\check{\alpha}}$. Pelo Lema 2.3, podemos assumir, sem perda de generalidade, que para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $p \in A_n$, $F_n^p \subseteq D_p$.

Do fato que $\mathbb{P}_f$ é c.c.c., segue que existe $\gamma < \omega_1$ tal que

$$\bigcup \{D_p : p \in A_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \gamma.$$

Seja $q \in \mathbb{P}_f$. Observe que $h_q(\gamma) \subseteq \gamma \subseteq \omega_1$ e, portanto, $q \Vdash * \notin h(\gamma)$. Daí, $q \Vdash \dot{\delta}_*(h(\gamma)) = 0$. Como $\mathbb{P}_f$ força que $(\dot{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\dot{\delta}_*$ com respeito à topologia fraca*, existem $r \leq q$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que

$$r \Vdash \forall n \geq m,\ |\dot{\mu}_n(h(\gamma))| < \check{\varepsilon}.$$

Mais uma vez pelo Lema 2.3, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\gamma \in D_r$. Seja $H = D_r \cap \gamma$ e $E = D_r \setminus \gamma = \{\gamma = \alpha_1 < \cdots < \alpha_k\}$. Seja $F \subseteq \omega_1$, tal que $E < F$ e $|F| = 2|E|$ e denote $F = \{\alpha_i^1, \alpha_i^2 : 1 \leq i \leq k\}$.

Vamos obter, após 3 passos, $u \in \mathbb{P}_f$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que $u \leq r$, $n \geq m$ e $u \Vdash |\dot{\mu}_n(h(\gamma))| > \check{\varepsilon}$, contradizendo a hipótese: no Passo 1, estendemos r a uma condição s tal que $D_s = D_r \cup F$ e para todo $1 \leq i \leq k$, temos que $h_s(\alpha_i^1) \cap h_s(\alpha_i^2) = \bigcup_{\xi \in D_r} h_s(\xi)$; no Passo 2, estendemos s a uma condição t tal que $D_t \subseteq \gamma \cup E \cup F$ de forma que existe $n \geq m$ e $p \in A_n$ tal que $t \leq p$ e

$$t \Vdash |\dot{\mu}_n(\bigcup_{\xi \in \check{D}_r} h(\xi))| < \check{\varepsilon};$$

finalmente, no Passo 3 vamos obter u tal que $D_u = (D_t \cap \gamma) \cup E$, $u \leq r$ e

$$u \Vdash |\dot{\mu}_n(h(\gamma))| > \check{\varepsilon},$$

contradizendo a hipótese.

Passo 1. Defina $s = (D_s, h_s, i_s)$ por $D_s = D_r \cup F$;

$$h_s(\xi) = \begin{cases} h_r(\xi) & \text{se } \xi \in D_r, \\ D_r \cup \{\xi\} & \text{se } \xi \in F; \end{cases}$$

e

$$i_s(\{\xi, \eta\}) = \begin{cases} i_r(\{\xi, \eta\}) & \text{se } \xi, \eta \in D_r, \\ \min\{\xi, \eta\} \cap D_s & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É evidente que s satisfaz as condições 1 e 2 da Definição 2.1 e as condições 3.(a) e (b) para $\xi, \eta \in D_r$ seguem do fato que $r \in \mathbb{P}_f$.

Sejam então $\xi \in D_r$ e $\eta \in F$. Daí, $\xi \in h_s(\eta)$ e $h_s(\xi) \subseteq h_s(\eta)$ de forma que $h_s(\xi) * h_s(\eta) = h_s(\xi) \setminus h_s(\eta) = \emptyset$. Logo, s satisfaz as condições 3.(a) e (b) da Definição 2.1 para esses pares.

Sejam agora $\xi, \eta \in F$ e $\xi < \eta$. Neste caso, $\xi \notin h_s(\eta)$ e daí, $h_s(\xi) * h_s(\eta) = h_s(\xi) \cap h_s(\eta) = D_r$. Mas $D_r = H \cup E \subseteq \xi \cap D_s$, de forma que s satisfaz as condições 3.(a) e 3.(b) para esses pares.

Portanto, $s \in \mathbb{P}_f$ e é fácil ver que $s \leq r$.

Passo 2. Observe que $\mathbb{P}_f$ força que $\bigcup_{\xi \in \check{D}_r} h(\xi)$ é um aberto-fechado e $* \notin \bigcup_{\xi \in \check{D}_r} h(\xi)$. Daí, temos por hipótese que $\mathbb{P}_f$ força que $\dot{\delta}_*(K_1 \setminus \bigcup_{\xi\in\check{D}_r} h(\xi)) = 1$.

Como $\mathbb{P}_f$ força que $(\dot{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\dot{\delta}_*$ com respeito à topologia fraca*, existem $t \leq s$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ tais que

$$t \Vdash \dot{\mu}_n(K_1 \setminus \bigcup_{\xi\in\check{D}_r} h(\xi)) > 1 - \check{\varepsilon}.$$

Mas A_n é uma anticadeia maximal e daí, podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe $p \in A_n$ tal que $t \leq p$. Como $t \leq p, r$, temos que

$$t \Vdash \dot{\mu}_n(\check{F}_n^p \setminus \bigcup_{\xi\in\check{D}_r} h(\xi)) \geq \dot{\mu}_n(K_1 \setminus \bigcup_{\xi\in\check{D}_r} h(\xi)) - |\dot{\mu}_n|(K_1 \setminus \check{F}_n^p) > 1 - 2\check{\varepsilon},$$

ou seja,

$$\sum\{a_\alpha : \alpha \in F_n^p \setminus \bigcup_{\xi\in D_r} h_t(\xi)\} > 1 - 2\varepsilon.$$

Passo 3. Seja $T = D_t \cap \gamma$ e observe que t, T, E, F e H satisfazem as hipóteses do Lema 2.12. Logo, existe $u = (D_u, h_u, i_u) \in \mathbb{P}_f$ tal que $D_u = T \cup E$, $u \leq t|_T$, $u \leq t|_{H\cup E}$ e $T \setminus \bigcup_{\xi\in H\cup E} h_t(\xi) \subseteq h_u(\alpha_1)$ e observe que $t|_T \leq p$, que $H \cup E = D_r$ e que $t|_{H\cup E} = r$.

Resta mostrar a afirmação abaixo e temos uma contradição com o fato que $u \leq r$ e que $r \Vdash |\dot{\mu}_n(h(\gamma))| < \check{\varepsilon}$:

Afirmação. *$u \Vdash \dot{\mu}_n(h(\gamma)) > \check{\varepsilon}$.*

Demonstração da Afirmação. Considere

$$I = \{\alpha \in F_n^p : t \Vdash \check{\alpha} \notin \bigcup_{\xi\in\check{D}_r} h(\xi)\} = F_n^p \setminus \bigcup_{\xi\in D_r} h_t(\xi)$$

e note que, como $D_r = H \cup E$, $\alpha_1 = \gamma$ e $F_n^p \subseteq D_p \subseteq D_t \cap \gamma = T$, temos que

$$I \subseteq T \setminus \bigcup_{\xi\in D_r} h_t(\xi) \subseteq h_u(\gamma).$$

Como $u \leq t|_T \leq p$ e p força que $\dot{\mu}_n(\{\check{\alpha}\}) = \check{a}_{\check{\alpha}}$ para todo $\alpha \in F_n^p$, temos que

$$u \Vdash \dot{\mu}_n(\check{I}) = \sum_{\alpha \in \check{I}} \check{a}_\alpha > 1 - 2\check{\varepsilon},$$

e, como $\mathbb{P}_f$ força que $\|\dot{\mu}_n\| \leq 1$, temos que

$$u \Vdash |\dot{\mu}_n|(h(\gamma) \setminus \check{I}) \leq |\dot{\mu}_n|(K_1 \setminus \check{I}) \leq \|\dot{\mu}_n\| - |\dot{\mu}_n|(\check{I}) < 1 - (1 - 2\check{\varepsilon}) = 2\check{\varepsilon}.$$

Portanto,

$$u \Vdash \dot{\mu}_n(h(\gamma)) \geq \dot{\mu}_n(\check{I}) - |\dot{\mu}_n|(h(\gamma) \setminus \check{I}) > 1 - 4\check{\varepsilon} > \check{\varepsilon},$$

concluindo a demonstração da afirmação e da proposição. □

3.3 A propriedade (C) e a propriedade (E)

Nesta seção, vamos considerar duas versões convexas de propriedades topológicas. A primeira delas é uma versão da propriedade de Lindelöf:

Definição 3.6 (Corson [12])**.** *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a propriedade (C) se toda família de subconjuntos fechados e convexos cuja intersecção é vazia possui uma subfamília enumerável de intersecção vazia.*

Proposição 3.7. *Se X é um espaço de Banach fracamente Lindelöf, então X tem a propriedade (C).*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos fechados e convexos cuja intersecção é vazia. Pelo Teorema 1.28, temos que todo elemento de $\mathcal{F}$ é fracamente fechado. Assim, $\mathscr{C} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ é uma família de subconjuntos de X fracamente abertos que recobrem X. Como X é fracamente Lindelöf, existe um subrecobrimento enumerável $\mathscr{C}^*$ de $\mathscr{C}$. Segue que $\mathcal{F}^* = \{F \in \mathcal{F} : X \setminus F \in \mathscr{C}^*\}$ é uma subfamília enumerável de $\mathcal{F}$ de intersecção vazia. □

Passemos então à segunda propriedade, esta, uma versão convexa da seqüencialidade do espaço dual:

Definição 3.8 (Efremov [18])**.** *Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X tem a propriedade (E) quando para todo conjunto limitado e convexo C de X^*, se $\varphi \in \overline{C}^{w^*}$, então existe uma seqüência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tal que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ com respeito à topologia fraca*.*

Plichko e Yost ([51], pág. 352) perguntaram se (C) implica (E) e Justin T. Moore obteve uma modificação do espaço de Ostaszewski, usando o princípio conjuntístico $\diamondsuit$, que tem (C) e não tem (E). O espaço que apresentamos neste capítulo é também um contra-exemplo para a conjectura de Plichko e Yost:

Teorema 3.9. *Em $V[G]$, $C(K_1)$ tem a propriedade (C) e não tem a propriedade (E).*

Demonstração. Pelos Teoremas 1.44 e 3.3 temos que $C(K_1)$ é fracamente Lindelöf e, pela Proposição 3.7, segue que $C(K_1)$ tem a propriedade (C).

Para mostrar que, em $V[G]$, $C(K_1)$ não tem a propriedade (E), observe que o conjunto

$$C = \{\sum_{i=1}^{k} a_i\delta_{x_i} : k \in \mathbb{N},\ a_i \in (0,1],\ x_i \in L_1 = K_1 \setminus \{*\},\ \sum_{i=1}^{k} a_i = 1\},$$

é um subconjunto convexo de $S_{C(K_1)^*}$.

Vejamos que $\delta_* \in \overline{C}^{w^*}$. Dados $\varepsilon > 0,\ f_1, \ldots, f_n \in C(K_1)$, temos que

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}[(f_i(*) - \varepsilon, f_i(*) + \varepsilon)]$$

é uma vizinhança aberta de $*$. Como $*$ é um ponto de acumulação de K_1, existe $x \in L_1 \cap U$ e segue que

$$\delta_x \in \{\mu \in C(K_1)^* : \forall 1 \leq i \leq n,\ |\mu(f_i) - \delta_*(f_i)| < \varepsilon\} \cap C.$$

Logo, $\delta_* \in \overline{C}^{w^*}$.

Por outro lado, pela Proposição 3.5, não existe uma seqüência em C que converge para δ_* com respeito à topologia fraca*. Portanto, $C(K_1)$ não possui a propriedade (E). $\square$

Capítulo 4

Um espaço de Asplund sem sistema biortogonal não-enumerável

Neste capítulo, vamos estudar as propriedades dos espaços K_2 e $C(K_2)$:

Definição 4.1. *Fixemos um modelo V, seja $\theta = \omega_2$ e suponhamos que existe $f : [\omega_2]^2 \to [\omega_2]^{\leq \aleph_0}$ uma função*[1] *tal que para todo $\xi < \eta < \omega_2$, $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq \xi$ e se A é uma família não-enumerável de subconjuntos finitos de ω_2 que forma um Δ-sistema, então existem $a, b \in A$ e uma bijeção $e : a \to b$ que preserva ordem, constante em $a \cap b$ e tal que para todo $\xi \in a$, $\xi \leq e(\xi)$ e para todo $\zeta \in a \cap b$, todo $\xi \in a \setminus b$ e todo $\eta \in b \setminus a$:*

(i) se $\zeta < \xi$, então $f(\{\zeta, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(ii) se $\zeta < \eta$, então $f(\{\zeta, \xi\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(iii) $a \cap \xi \cap \eta \subseteq f(\{\xi, \eta\})$.

Fixemos um filtro $\mathbb{P}_f$-genérico G sobre V. Vamos chamar de L_2 o espaço da Definição 2.7 correspondente ao forcing *$\mathbb{P}_f$.*

[1] Observe que o Teorema A.22 garante a existência de um *forcing* que força a existência de uma função f com as propriedades aqui enunciadas, garantindo, portanto, que a existência dessa função é consistente com ZFC. Logo, podemos assumir que essa função existe no modelo inicial V.

Observe que f tem a propriedade Δ e, portanto, segue do Teorema 2.5 que $\mathbb{P}_f$ é c.c.c. e, portanto, preserva cardinais. Segue da Proposição 2.8 que L_2 é localmente compacto.

Notação 4.2. *Vamos chamar de K_2 a compactificação de Alexandroff de L_2.*

Segue dos Teoremas 2.10 e 2.11 que L_2 e K_2 são dispersos de peso $\aleph_2$ e, portanto, $C_0(L_2)$ e $C(K_2)$ são espaços de Asplund de densidade $\aleph_2$.

Começamos, na Seção 4.1, aplicando o Lema 2.14 para mostrar que toda potência finita do espaço K_2 é hereditariamente separável. Para isso, usamos fortemente as propriedades satisfeitas pela função f da Definição 4.1, lembrando que estas são mais fortes que a propriedade Δ e que as satisfeitas pela função construída em [5].

Na seção seguinte, 4.2, vamos analisar outras propriedades interessantes do espaço K_2 e suas conseqüências para o espaço de Banach $C(K_2)$.

Primeiramente, mostramos que K_2 tem altura ω_2 e é, portanto, o primeiro exemplo consistente de um espaço compacto e disperso, hereditariamente separável de altura ω_2. Lembramos que o primeiro exemplo consistente de um espaço compacto e disperso, de largura enumerável e altura ω_2 é o de Baumgartner e Shelah [5]. Por outro lado, a hipótese do contínuo implica que não existem espaços como o de [5] ou como K_2 e Just [35] mostrou, usando o *forcing* de Cohen, que a não existência destes espaços também é consistente com a negação da hipótese do contínuo.

Ainda do ponto de vista topológico, temos que o grau de Lindelöf hereditário de K_2 é $\aleph_2$, de forma que nosso espaço é o primeiro contra-exemplo compacto consistente para a desigualdade $hL(K) \leq hd(K)^+$. Lembramos que a desigualdade dual para espaços compactos segue de um resultado de Shapirovskiĭ [62], ou seja, vale em ZFC que para todo espaço compacto K, $hd(K) \leq hL(K)^+$.

Passamos finalmente às propriedades do espaço de Banach $C(K_2)$. Assim como no capítulo anterior, segue do fato que todas as potências finitas de K_2 são hereditariamente separáveis, que $C(K_2)$ não admite renormação Fréchet-diferenciável e não contém nenhum sistema biortogonal não-enumerável. Além disso, a densidade de $C(K_2)$ é $\aleph_2$, assim como o peso de K_2. Temos, portanto, o primeiro exemplo consistente de um espaço de Banach $C(K)$ de densidade estritamente maior que $\aleph_1$ sem nenhum sistema biortogonal não-enumerável. Todorcevic [65] mostrou que todo espaço de Banach da forma $C(K)$ de densidade estritamente maior que $\aleph_1$ possui um sistema semi-biortogonal não-enumerável. Assim, segue do nosso exemplo que não se pode generalizar o resultado de Todorcevic em ZFC, substituindo-se a existência de um sistema semi-biortogonal não-enumerável pela existência de um sistema biortogonal não-enumerável.

4.1 Separabilidade hereditária

Teorema 4.3. *Em $V[G]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que K_2^n é hereditariamente separável.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução em $n \in \mathbb{N}$: fixemos $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que para todo $0 \leq i < n$, K_2^i é hereditariamente separável (convencionamos $K_2^0 = \{*\}$). Mostremos que K_2^n é hereditariamente separável. Para isso, pela Proposição 1.10, basta mostrar que K_2^n não possui seqüências separadas à esquerda de cardinalidade $\aleph_1$.

Em V, suponha que $(\dot{x}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma seqüência de nomes tal que $\mathbb{P}_f$ força que $(\dot{x}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é uma seqüência de K_2^n, separada à esquerda e de cardinalidade $\aleph_1$ e que para cada $\alpha < \omega_1$, temos que $\dot{x}_\alpha = (\dot{x}_1^\alpha, \ldots, \dot{x}_n^\alpha)$, onde cada $\dot{x}_i^\alpha$ é um nome para um elemento de K_2.

Observe que se

$$\mathbb{P}_f \Vdash \exists 1 \leq i \leq n,\ \exists X \subseteq \omega_1,\ |X| = \aleph_1 \text{ tal que } \forall \alpha, \beta \in X,\ \dot{x}_i^\alpha = \dot{x}_i^\beta,$$

então

$$\mathbb{P}_f \Vdash \exists 1 \leq i \leq n,\ \exists X \subseteq \omega_1,\ |X| = \aleph_1 \text{ tal que } ((\dot{x}_1^\alpha, \ldots, \dot{x}_{i-1}^\alpha, \dot{x}_{i+1}^\alpha, \ldots, \dot{x}_n^\alpha))_{\alpha\in X}$$

$$\text{é uma seqüência separada à esquerda em } K_2^{n-1},$$

contradizendo a hipótese indutiva. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathbb{P}_f$ força que para todo $1 \leq i \leq n$ e todo $\alpha < \beta < \omega_1$, $\dot{x}_i^\alpha \neq \dot{x}_i{}^\beta$ e $\dot{x}_i^\alpha \in L_2 = K_2 \setminus \{*\}$.

Daí, para cada $\alpha < \omega_1$, existem $\dot{F}_1^\alpha, \ldots, \dot{F}_n^\alpha$ nomes para subconjuntos finitos de ω_2 tais que $\mathbb{P}_f$ força que

$$\forall \alpha < \omega_1 \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i^\alpha \in h(\dot{x}_i^\alpha) \setminus \bigcup_{\xi \in \dot{F}_i^\alpha} h(\xi)$$

e

$$\forall \alpha < \beta < \omega_1 \quad \exists 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i^\alpha \notin h(\dot{x}_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in \dot{F}_i^\beta} h(\xi).$$

Para cada $\alpha < \omega_1$, sejam $p_\alpha = (D_\alpha, h_\alpha, i_\alpha) \in \mathbb{P}_f$, $x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha \in \omega_2$ e $F_1^\alpha, \ldots, F_n^\alpha \subseteq \omega_2$ finitos tais que

$$p_\alpha \Vdash \forall 1 \leq i \leq n \quad \dot{x}_i^\alpha = \check{x}_i^\alpha \text{ e } \dot{F}_i^\alpha = \check{F}_i^\alpha.$$

Pelo Lema 2.3, podemos assumir, sem perda de generalidade, que para todo $\alpha < \omega_1$ e todo $1 \leq i \leq n$, $F_i^\alpha \subseteq D_\alpha$ e $x_i^\alpha \in D_\alpha$.

Pelo Lema 1.3, podemos também assumir que $(D_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ forma um Δ-sistema de raiz D. Como, para cada par $\{\xi, \eta\} \subseteq D$ e cada $\alpha < \omega_1$, temos que $i_\alpha(\{\xi, \eta\}) \in [f(\{\xi, \eta\})]^{<\aleph_0}$, podemos supor ainda que para todo $\alpha < \beta < \omega_1$, se $\xi, \eta \in D$, $\xi \neq \eta$, então $i_\alpha(\{\xi, \eta\}) = i_\beta(\{\xi, \eta\})$.

Daí, podemos assumir também, sem perda de generalidade, que $(D_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ forma um Δ-sistema de raiz D tal que para cada par $\alpha < \beta < \omega_1$, existe uma função $e_{\alpha\beta} : D_\alpha \to D_\beta$ bijetora que preserva ordem e tal que:

- se $\xi, \eta \in D_\alpha$, então $\xi \in h_\alpha(\eta)$ se, e somente se, $e_{\alpha\beta}(\xi) \in h_\beta(e_{\alpha\beta}(\eta))$;
- se $\xi \in D$, então $e_{\alpha\beta}(\xi) = \xi$;
- se $\xi \in D_\alpha$, então $\xi \leq e_{\alpha\beta}(\xi)$;
- para todo $1 \leq i \leq n$, $e_{\alpha\beta}(x_i^\alpha) = x_i^\beta$.

Daí, podemos supor que para todo $1 \leq i \leq n$, temos que: ou $x_i^\alpha = x_i^\beta$ para todo $\alpha < \beta < \omega_1$; ou $x_i^\alpha \notin D$ para todo $\alpha < \omega_1$.

Finalmente, pelas propridades da função f da Definição 4.1, existem $\alpha < \beta < \omega_1$ tais que para todo $\zeta \in D$, todo $\xi \in D_\alpha \setminus D$ e todo $\eta \in D_\beta \setminus D$:

(i) se $\zeta < \xi$, então $f(\{\zeta, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(ii) se $\zeta < \eta$, então $f(\{\zeta, \xi\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(iii) $D_\alpha \cap \xi \cap \eta \subseteq f(\{\xi, \eta\})$.

Temos assim que p_α e p_β satisfazem todas as hipóteses do Lema 2.14. Daí, existe $q \leq p_\alpha, p_\beta$ em $\mathbb{P}_f$ tal que para todo $\xi \in D_\alpha$ e todo $\eta \in D_\beta$,

$$\xi \in h_q(\eta) \text{ se, e somente se, } e_{\alpha\beta}(\xi) \in h_2(\eta).$$

Daí, para todo $1 \leq i \leq n$ e todo $\xi \in D_\beta$, temos que

$$x_i^\alpha \in h_q(\xi) \text{ se, e somente se, } x_i^\beta \in h_2(\xi).$$

Assim, temos que

$$x_i^\alpha \in h_q(x_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in F_i^\beta} h_q(\xi).$$

Mas $q \leq p_\alpha, p_\beta$ e então

$$q \Vdash \forall 1 \leq i \leq n,\ \dot{x}_i^\alpha = \check{x}_i^\alpha,\ \dot{x}_i^\beta = \check{x}_i^\beta \text{ e } \dot{F}_i^\beta = \check{F}_i^\beta.$$

Portanto,

$$q \Vdash \forall 1 \leq i \leq n,\ \dot{x}_i^\alpha = \check{x}_i^\alpha \in h(\check{x}_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in \check{F}_i^\beta} h(\xi) = h(\dot{x}_i^\beta) \setminus \bigcup_{\xi \in \dot{F}_i^\beta} h(\xi),$$

contradizendo a hipótese. □

4.2 Conseqüências topológicas e geométricas

Primeiramente, vejamos algumas outras propriedades topológicas de K_2:

Teorema 4.4. *Em $V[G]$, K_2 é um espaço compacto e disperso, hereditariamente separável de altura ω_2.*

Demonstração. Já vimos que K_2 é compacto pela própria definição e K_2 é disperso pelo Teorema 2.10. Segue do Teorema 4.3 que K_2 é hereditariamente separável e, portanto, resta verificar que $ht(K_2) = \omega_2$.

Primeiramente, observe que para todo $\alpha < ht(K_2)$, como K_2 é hereditariamente separável, $K_2^{(\alpha)}$ é separável. Além disso, pela própria definição (1.23), $K_2^{(\alpha)} \setminus K_2^{(\alpha+1)}$ é o conjunto dos pontos isolados de $K_2^{(\alpha)}$ e, como $K_2^{(\alpha)}$ é separável, temos que $|K_2^{(\alpha)} \setminus K_2^{(\alpha+1)}| \leq \aleph_0$.

Daí, para qualquer $\alpha < \omega_2$,

$$|K_2 \setminus K_2^{(\alpha)}| = |\bigcup_{\beta<\alpha} K_2^{(\beta)} \setminus K_2^{(\beta+1)}| \leq \aleph_1$$

e, portanto, $|K_2^{(\alpha)}| = \aleph_2$. Logo, $ht(K_2) \geq \omega_2$.

Por outro lado, para todo $\alpha \in L_2 = K_2 \setminus \{*\}$, temos que $\min K_2^{(\alpha)}$ é um ponto isolado de $K_2^{(\alpha)}$ e, portanto, $\min K_2^{(\alpha)} \notin K_2^{(\alpha+1)}$. Por indução, segue que $\min K_2^{(\alpha+1)} \geq \alpha+1$. Logo,

$$\bigcap_{\alpha<\omega_2} K_2^{(\alpha)} = \{*\}$$

e então, $ht(K_2) = \omega_2$, concluindo a demonstração. □

Lembramos mais uma vez que Just [35] mostrou que no modelo de Cohen não existem espaços compactos, dispersos, de largura enumerável e altura ω_2. Por outro lado, Baumgartner e Shelah [5] mostraram a consistência da existência de um espaço com estas propriedades. K_2 é um espaço com propriedades mais fortes que aquelas do espaço de [5] e que, portanto, não existe no modelo de Cohen.

Segue do resultado acima o seguinte:

Corolário 4.5. *Em $V[G]$, K_2 é um espaço compacto tal que $hd(K_2) = \aleph_0$ e $hL(K_2) = \aleph_2$. Portanto, $hL(K_2) \not\leq hd(K_2)^+$.*

Demonstração. Já vimos que $hd(K_2) = \aleph_0$ e sabemos que $hL(K_2) \leq |K_2| = \aleph_2$.

Por outro lado, pelo teorema anterior temos que a família

$$\mathscr{C} = \{K_2 \setminus K_2^{(\alpha)} : \alpha < \omega_2\}$$

é um recobrimento aberto de $K_2 \setminus \{*\}$ e observe que se $X \subseteq \omega_2$ é tal que $|X| < \aleph_2$, então existe $\gamma \in \omega_2$ tal que $X < \gamma$. Daí,

$$\bigcup \{K_2 \setminus K_2^{(\alpha)} : \alpha \in X\} \subseteq K_2 \setminus K_2^{(\gamma)}$$

e, como vimos na demonstração do teorema anterior,

$$|K_2 \setminus K_2^{(\gamma)}| \leq \aleph_1.$$

Ou seja, $\mathscr{C}$ é um recobrimento aberto de $K_2 \setminus \{*\}$ sem subrecobrimento de cardinalidade menor ou igual a $\aleph_1$. Portanto, $hL(K_2) = \aleph_2$. □

Lembramos que Shapirovskiĭ [62] mostrou em ZFC que, para todo espaço compacto K, $hd(K) \leq hL(K)^+$ (Teorema 1.15).

Passemos, então, às propriedades do espaço de Banach $C(K_2)$. Assim como no capítulo anterior, podemos novamente concluir o seguinte:

Teorema 4.6. *Em $V[G]$, $C(K_2)$ é um espaço de densidade $\aleph_2$ que não admite renormação Fréchet-diferenciável e não possui nenhum sistema biortogonal não-enumerável.*

Demonstração. O fato que $C(K_2)$ tem densidade $\aleph_2$ segue do Teorema 2.11, assim como o fato que K_2 tem peso $\aleph_2$.

Pelo Teorema 4.3, temos que $hd(K_2^n) = \aleph_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo Corolário 1.45, temos que $C(K_2)$ não admite uma renormação Fréchet-diferenciável e não possui nenhum sistema biortogonal não-enumerável. □

Assim, $C(K_2)$ é o primeiro exemplo consistente de um espaço de Banach $C(K)$ de densidade estritamente maior que $\aleph_1$ sem nenhum sistema biortogonal não-enumerável. Lembramos que, pelo Teorema 1.46 de Todorcevic, todo espaço de Banach da forma $C(K)$ de densidade estritamente maior que $\aleph_1$ possui um sistema semi-biortogonal não-enumerável. Nosso exemplo mostra que não podemos generalizar esse resultado em ZFC, substituindo a existência de um sistema semi-biortogonal não-enumerável pela existência de um sistema biortogonal não-enumerável.

Apêndice A

Pântanos e a propriedade Δ

Nosso objetivo aqui é apresentar a demonstração de que é consistente com ZFC que existe uma função $f : [\omega_2]^2 \to [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ tal que para todo $\xi < \eta < \omega_2$, $f(\{\xi,\eta\}) \subseteq \xi$ e se A é uma família não-enumerável de subconjuntos finitos de ω_2 que forma um Δ-sistema, então existem $a, b \in A$ e uma bijeção $e : a \to b$ que preserva ordem constante em $a \cap b$ e tal que para todo $\xi \in a$, $\xi \leq e(\xi)$ e para todo $\zeta \in a \cap b$, todo $\xi \in a \setminus b$ e todo $\eta \in b \setminus a$:

(i) se $\zeta < \xi$, então $f(\{\zeta,\eta\}) \subseteq f(\{\xi,\eta\})$;

(ii) se $\zeta < \eta$, então $f(\{\zeta,\xi\}) \subseteq f(\{\xi,\eta\})$;

(iii) $a \cap \xi \cap \eta \subseteq f(\{\xi,\eta\})$.

Lembramos que no Capítulo 4, o espaço L_2 é definido num modelo obtido por *forcing* e que assumimos a existência dessa função no modelo inicial (veja a Definição 4.1). Assim, nosso objetivo aqui é apresentar uma demonstração do Teorema A.22, um resultado não publicado de Koszmider.

Para isso, vamos introduzir, na Seção A.1, a noção de $(\kappa, 1)$-pântanos simplificados ($(\kappa, 1)$-*simplified morasses*) e provar algumas propriedades básicas desses objetos. Na seção A.2, apresentamos a noção de *forcing* $\mathcal{F}$-próprio, onde $\mathcal{F} \subseteq [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ e mostramos que se $\mathcal{F}$ é um conjunto estacionário, então todo *forcing* $\mathcal{F}$-próprio preserva ω_1. Finalmente, na Seção A.3, definimos um *forcing* $\mathbb{P}$ e, utilizando os resultados das seções anteriores, mostramos que $\mathbb{P}$ força a existência da função f com as propriedades que queremos.

A noção de $(\kappa, 1)$-pântanos simplificados foi introduzida por Velleman [66] e [67].

A.1 Pântanos simplificados

Notação A.1. *Dada uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ e um conjunto X, denotamos por* $\mathcal{F}|X = \{Y \in \mathcal{F} : Y \subsetneq X\}$.

Definição A.2 (Velleman [66], [67])**.** *Seja κ um cardinal regular. Um $(\kappa, 1)$-pântano simplificado é uma família $\mathcal{F} \subseteq [\kappa^+]^{<\kappa}$ que satisfaz as seguintes condições:*

1. *$\mathcal{F}$ é bem-fundada com relação à inclusão;*
2. *para todo $X \in \mathcal{F}$, temos que $|\mathcal{F}|X| < \kappa$;*
3. *para quaisquer $X, Y \in \mathcal{F}$, se $rank(X) = rank(Y) = \alpha$, então X e Y têm o mesmo tipo de ordem (i.e., ambos são ordem-isomorfos a um ordinal θ_α) e se f_{XY} é a única bijeção de X sobre Y que preserva ordem, então $\mathcal{F}|Y = \{f_{XY}[Z] : Z \in \mathcal{F}|X\}$;*
4. *$\mathcal{F}$ é um conjunto dirigido com relação à inclusão, ou seja, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{F}$, existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $X, Y \subseteq Z$;*
5. *$\mathcal{F}$ é localmente quase dirigido, ou seja, para todo $X \in \mathcal{F}$,*
   a) *ou $\mathcal{F}|X$ é dirigido;*
   b) *ou existem $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ tais que $rank(X_1) = rank(X_2)$ e $X = X_1 * X_2$, i.e., $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 < X_1 \setminus X_2 < X_2 \setminus X_1$ e $\mathcal{F}|X = \mathcal{F}|X_1 \cup \mathcal{F}|X_2 \cup \{X_1, X_2\}$;*
6. *$\bigcup \mathcal{F} = \kappa^+$.*

Lema A.3 (Velleman [66], [67])**.** *Seja $\mathcal{F}$ um $(\kappa, 1)$-pântano simplificado. Sejam $X, Y \in \mathcal{F}$ tais que $rank(X) = rank(Y)$ e $\alpha \in X \cap Y$. Então $X \cap \alpha = Y \cap \alpha$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ um $(\kappa, 1)$-pântano simplificado. Pela condição 4 da Definição A.2, $\mathcal{F}$ é dirigido e, portanto, vamos fazer a demonstração por indução no $rank(Z)$, onde $X, Y \subseteq$

$Z \in \mathcal{F}$. Observe que $\mathcal{F}$ satisfaz a condição 5 da Definição A.2 e consideremos os seguintes casos:

Caso 1. $\mathcal{F}|Z$ é dirigido.

Neste caso, existe $Z_1 \in \mathcal{F}|Z$ tal que $X, Y \subseteq Z_1 \subsetneq Z$. Daí, $rank(Z_1) < rank(Z)$ e, pela hipótese indutiva, concluímos o resultado.

Caso 2. Existem $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ tal que $Z = Z_1 * Z_2$ e $rank(Z_1) = rank(Z_2)$.

Aqui, se $X, Y \subseteq Z_i$ para $i = 1$ ou $i = 2$, então, pela hipótese indutiva, concluímos o resultado. Senão, como $Z = Z_1 * Z_2$, segue que $X \subseteq Z_1$ e $Y \subseteq Z_2$. Logo, se $\alpha \in X \cap Y$, então $\alpha \in Z_1 \cap Z_2$ e daí, segue da condição 3 da Definição A.2 que $f_{Z_1 Z_2}[X] \subseteq Z_2$ e $rank(f_{Z_1 Z_2}[X]) = rank(X) = rank(Y)$. Como $f_{Z_1 Z_2}$ preserva a ordem, segue que $f_{Z_1 Z_2}|_{Z_1 \cap Z_2} = id_{Z_1 \cap Z_2}$. Logo, $\alpha \in f_{Z_1 Z_2}[X]$ e, pela hipótese indutiva, temos que $f_{Z_1 Z_2}[X] \cap \alpha = Y \cap \alpha$ e $f_{Z_1 Z_2}[X] \cap \alpha = X$, concluindo a demonstração. □

Lema A.4. *Seja $\mathcal{F}$ um $(\kappa, 1)$-pântano simplificado. Então temos:*

a) para todo $X \in \mathcal{F}$ e todo $\alpha < ht(\mathcal{F})$, se $rank(X) < \alpha$, então existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $rank(Z) = \alpha$ e $X \subseteq Z$;

b) para todo $Y \in \mathcal{F}$, todo $X \in \mathcal{F}|Y$ e todo $rank(X) < \alpha < rank(Y)$, existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $rank(Z) = \alpha$ e $X \subseteq Z \subseteq Y$.

Observe que segue de b) que $ht(\mathcal{F}) \leq \kappa$.

Demonstração. Primeiramente, sejam $X \in \mathcal{F}$ e $\alpha < ht(\mathcal{F})$. Fixe $Y' \in \mathcal{F}$ tal que $rank(Y') \geq \alpha$ e pela condição 4 da Definição A.2, existe $Y \in \mathcal{F}$ tal que $X, Y' \subseteq Y$ de $rank$ minimal tal que $X \subseteq Y$.

Observe que $rank(Y) \geq \alpha$. Mostremos que não podemos ter que $rank(Y) > \alpha$, concluindo, portanto, a demonstração de a). Pela condição 5 da Definição A.2 para Y, temos dois casos:

Caso 1. $\mathcal{F}|Y$ é dirigido.

Neste caso, existe $Z \in \mathcal{F}|Y$ tal que $rank(Z) = \alpha$, já que $rank(Y) > \alpha$. Seja $Z' \in \mathcal{F}|Y$ tal que $X, Z \subseteq Z'$ e observe que $rank(Z') \geq \alpha$, contradizendo a minimalidade de $rank(Y)$.

Caso 2. Existem $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$ tais que $Y = Y_1 * Y_2$ e $rank(Y_1) = rank(Y_2)$.

Note que $\alpha < rank(Y) = rank(Y_i) + 1$ e, portanto, $rank(Y_i) \geq \alpha$. Daí, ou $X \in \mathcal{F}|Y_1$, ou $X \in \mathcal{F}|Y_2$ e temos, também, uma contradição com a minimalidade do $rank(Y)$ e concluímos a demonstração de a).

Sejam agora $\alpha < ht(\mathcal{F})$, $X, Y \in \mathcal{F}$ e $X \subseteq Y$ tais que $rank(X) < \alpha < rank(Y)$. Por a), temos que existem $Z_1, Z_2 \in \mathcal{F}$ tais que $X \subseteq Z_1 \subseteq Z_2$, $rank(Z_1) = \alpha$ e $rank(Z_2) = rank(Y)$. Considere f_{Z_2Y} e temos que $f_{Z_2Y}[X] \subseteq f_{Z_2Y}[Z_1]$, $f_{Z_2Y}[Z_1] \in \mathcal{F}$ e $rank(f_{Z_2Y}(Z_1)) = \alpha$.

É suficiente mostrar que $f_{Z_2Y}(X) = X$, i.e., $f_{Z_2Y}(\alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \in X$. Mas se $\alpha \in X$ e $\alpha \in Z_2 \cap Y$, pelo Lema A.3, temos que $ordtp(\alpha \cap Z_2) = ordtp(\alpha \cap Y)$, já que f_{Z_2Y} preserva ordem e, portanto, $f_{Z_2Y}(\alpha) = \alpha$. □

Definição A.5. *Seja $\mathcal{F}$ um $(\kappa, 1)$-pântano simplificado e seja $\alpha \in \kappa^+$. A seqüência $(\mathcal{F}_\xi(\alpha))_{\xi<\kappa}$ é chamada de α-seqüência (com respeito a $\mathcal{F}$) se para todo $\xi \in \kappa$ temos que existem $X_\xi \in \mathcal{F}$ tal que $rank(X_\xi) = \xi$ e $\alpha \in X_\xi$ tal que $\mathcal{F}_\xi(\alpha) = X_\xi \cap \alpha$ ou $\mathcal{F}_\xi(\alpha) = \emptyset$.*

Lema A.6. *Seja $\mathcal{F}$ um $(\kappa, 1)$-pântano simplificado. Se $\alpha \in \kappa^+$, então a α-seqüência é a única seqüência não-decrescente em $[\alpha]^{<\kappa}$ cuja união é igual a α.*

Demonstração. Sejam $\xi < \xi' < \kappa$.

Se $\mathcal{F}_\xi(\alpha) \neq \emptyset$, então, pelo Lema A.4, existe $Z \in \mathcal{F}$ tal que $rank(Z) = \xi'$ e $\mathcal{F}_\xi(\alpha) \subseteq Z$. Segue do Lema A.3 que $Z \cap \alpha = \mathcal{F}_{\xi'}(\alpha)$ e, assim, $\mathcal{F}_{\xi'}(\alpha) \supseteq \mathcal{F}_\xi(\alpha)$.

Finalmente, as condições 4 e 6 da Definição A.2 garantem que $\bigcup_{\xi<\kappa} \mathcal{F}_\xi(\alpha) = \alpha$ e a unicidade segue do Lema A.3. □

Definição A.7. *$\mathcal{F}$ é um conjunto estacionário codificador se é um subconjunto estacionário de $[\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ e existe uma função injetora $c : \mathcal{F} \to \omega_2$ tal que para quaisquer $X, Y \in \mathcal{F}$, se $X \subsetneq Y$, então $c(X) \in Y$.*

Lema A.8 (folclore)**.** *Suponha que $\mathcal{F} \subseteq [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ é um conjunto estacionário codificador e $\mathcal{F} \in M \prec H(\omega_3)$, $|M| = \aleph_0$, $M \cap \omega_2 \in \mathcal{F}$. Se $X \in \mathcal{F}$ e $X \subsetneq M$, então $X \in M$.*

Demonstração. Suponha que $X \in \mathcal{F}$ e $X \subsetneq M$. Como $\mathcal{F} \in M \prec H(\omega_3)$, temos que, em M, $\mathcal{F}$ é um conjunto estacionário codificador, de forma que existe $c : \mathcal{F} \to \omega_2$ que testemunha esse fato em M. Em particular, $\alpha = c(X) \in M \cap \omega_2$ e então, em M, $c^{-1}(\alpha)$ é um subconjunto enumerável de ω_2. Daí, $X \in M \cap [\omega_2]^{\leq \aleph_0}$, como queríamos. $\square$

Lema A.9. *Suponha que $\mathcal{F} \in M \prec H(\omega_3)$, $|M| = \aleph_0$, $X = M \cap \omega_2 \in \mathcal{F}$. Então $rank(X) = M \cap \omega_1$.*

Demonstração. Seja $\delta = rank(X)$.

Se $\delta \in M$, então temos, em M, $Y \in \mathcal{F}$ tal que $rank(Y) = \delta$. Pela condição 3 da Definição A.2, temos que existe um isomorfismo entre $\mathcal{F}|Y$ e $\mathcal{F}|X$, contradizendo a condição 1 da Definição A.2.

Mas observe que M contém todos os ordinais menores que δ e, portanto, todos os elementos de $\mathcal{F}$ de *rank* menor que δ. Logo, todos os elementos de $\mathcal{F}$ de *rank* menor que δ estão incluídos em $M \cap \omega_2 = X$, de forma que $rank(X) \geq \delta$. $\square$

Lema A.10. *Suponha que $\mathcal{F} \subseteq [\omega_2]^{\leq \aleph_0}$ é um conjunto estacionário codificador e $\mathcal{F} \in M \prec H(\omega_3)$, $|M| = \aleph_0$, $M \cap \omega_2 = X_0 \in \mathcal{F}$. Seja $Y \in \mathcal{F}$ tal que $rank(Y) < M \cap \omega_1 = \delta$. Então existe $Z(Y) \in M$ tal que:*

1) $Y \cap X_0 \subseteq Z(Y)$;

2) $rank(Z(Y)) = rank(Y)$.

Demonstração. Pelo Lema A.4, seja $Y' \in \mathcal{F}$ tal que $Y' \supseteq Y$ e $rank(Y') = rank(X_0) = \delta$. Daí, pela condição 3 da Definição A.2, $\mathcal{F}|Y'$ é isomorfo a $\mathcal{F}|X_0$ de forma que existe uma cópia $Z(Y) = f_{Y'X_0}[Y]$ de Y abaixo de X_0. Note que $Y \cap X_0 \subseteq Y' \cap X_0$ e $f_{Y'X_0}$ é constante em $Y' \cap X_0$. Daí, $Y \cap X_0 = Y \cap M \subseteq Z(Y)$. Agora, pelo Lema A.8, segue de $Z(Y) \in \mathcal{F}|X_0$ que $Z(Y) \in M$. $\square$

A.2 *Forcings* $\mathcal{F}$-próprios

Definição A.11. *Seja $\mathcal{F} \subseteq [\omega_2]^{\leq \aleph_0}$. Dizemos que um* forcing *$\mathbb{P}$ é $\mathcal{F}$-próprio se existem $\theta > (2^{|\mathbb{P}|})^+$ e um conjunto fechado e ilimitado $\mathcal{C} \subseteq [H(\theta)]^{\leq \aleph_0}$ tais que se $p \in M \in \mathcal{C}$ e*

$M \cap \omega_2 \in \mathcal{F}$, então existe $p_0 \leq p$ $(\mathbb{P}, M)$-genérico, i.e., $D \cap M$ é pré-denso abaixo de p_0 para todo $D \in M$ denso em $\mathbb{P}$.

Lema A.12. *Se $\mathcal{F} \subseteq [\omega_2]^{\leq \aleph_0}$ é um conjunto estacionário e $\mathbb{P}$ é um* forcing *$\mathcal{F}$-próprio, então $\mathbb{P}$ preserva ω_1.*

Demonstração. A demonstração é uma versão da demonstração de Shelah para a preservação de ω_1 por *forcings* próprios (veja [4] ou [63]). □

Definição A.13. *Seja $\mathbb{P}$ um* forcing *e $q \in \mathbb{P}$. Suponha que $M \prec H(\theta)$ e $\mathbb{P}, \pi_1, ..., \pi_k \in M$. Dizemos que uma fórmula $\phi(x_0, x_1, ..., x_k)$ bem-reflete q em $(M; \pi_1, ..., \pi_k)$ se as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $H(\theta)$ satisfaz $\phi(q, \pi_1, ..., \pi_k)$;

ii) se $s \in M$ é tal que M satisfaz $\phi(s, \pi_1, ..., \pi_k)$, então q e s são compatíveis.

Definição A.14. *Sejam $\mathcal{F} \subseteq [\omega_2]^{\leq \aleph_0}$ e $\mathbb{P}$ um* forcing*. Dizemos que $\mathbb{P}$ é simplesmente $\mathcal{F}$-próprio se existe θ tal que se $p \in \mathbb{P}$ e $M \prec H(\theta)$ são tais que p, $\mathbb{P}$, $\mathcal{F} \in M$ e $M \cap \lambda \in \mathcal{F}$, então existe $p_0 \leq p$ tal que para todo $q \geq p_0$, existem $\pi_1, ..., \pi_k \in M$ e uma fórmula $\phi(x_0, x_1, ..., x_k)$ que bem-reflete q em $(M, \pi_1, ..., \pi_k)$.*

Lema A.15. *Se $\mathbb{P}$ é simplesmente $\mathcal{F}$-próprio, então $\mathbb{P}$ é $\mathcal{F}$-próprio.*

Demonstração. Seja θ tal que se $p \in \mathbb{P}$ e $M \prec H(\theta)$ são tais que p, $\mathbb{P}$, $\mathcal{F} \in M$ e $M \cap \lambda \in \mathcal{F}$, então existe $p_0 \leq p$ tal que para todo $q \geq p_0$, existem $\pi_1, ..., \pi_k \in M$ e uma fórmula $\phi(x_0, x_1, ..., x_k)$ que bem-reflete q em $(M, \pi_1, ..., \pi_k)$.

Vejamos que p_0 é $(\mathbb{P}, M)$-genérico. Seja $D \in M$ um subconjunto denso de $\mathbb{P}$ e mostremos que $D \cap M$ é pré-denso abaixo de p_0. Seja $q \leq p_0$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $q \in D$. Sejam $\pi_1, ..., \pi_k \in M$ e $\phi(x_0, x_1, ..., x_k)$ tais que $\phi(x_0, x_1, ..., x_k)$ bem-reflete q em $(M, \pi_1, ..., \pi_k)$. Pela condição i) da Definição A.13, temos que $H(\theta)$ satisfaz $\phi(q, \pi_1, ...\pi_k)$. Pela elementaridade de M, temos que existe $s \in M \cap \mathbb{P}$ tal que M satisfaz $\phi(s, \pi_1, ...\pi_k)$ e $s \in D$. Segue da Definição A.14 que s e q são compatíveis, de forma que $D \cap M$ contém uma condição compatível com q, mostrando, assim, que $D \cap M$ é pré-denso abaixo de q e concluindo a demonstração. □

A.3 Construindo a função f

Nesta seção, fixemos um $(\omega_1, 1)$-pântano simplificado $\mathcal{F}$ que forma um subconjunto estacionário codificador de $[\omega_2]^{\leq\aleph_0}$. Vejamos a definição do *forcing* $\mathbb{P}$ que adiciona a função $f : [\omega_2]^2 \to [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ que precisamos:

Definição A.16. *Seja $\mathbb{P}$ o* forcing *formado pelas condições $p = (a_p, f_p, A_p)$, onde:*

a) $a_p \in [\omega_2]^{<\aleph_0}$;

b) $f_p : [a_p]^2 \to [\omega_2]^{<\omega}$;

c) $A_p \in [\mathcal{F}]^{<\aleph_0}$;

d) para quaisquer $\xi, \eta \in a_p$, $\xi \neq \eta$, temos que $f_p(\{\xi, \eta\}) \subseteq \bigcap\{X : X \in A_p,\ \xi, \eta \in X\} \cap \min\{\xi, \eta\}$;

ordenado por $p \leq q$ se $a_p \supseteq a_q$, $f_p \supseteq f_q$ e $A_p \supseteq A_q$.

Lema A.17. *Assumindo a hipótese do contínuo, $\mathbb{P}$ é simplesmente $\mathcal{F}$-próprio.*

Demonstração. Seja $\theta = \omega_3$ e sejam $p \in \mathbb{P}$ e $M \prec H(\theta)$ como na Definição A.16. A existência de M segue de nossas hipóteses sobre $\mathcal{F}$.

Seja $X_0 = M \cap \omega_2$ e defina $p_0 = (a_p, f_p, A_p \cup \{X_0\})$. Observe que $p_0 \in \mathbb{P}$.

Agora, dado $q \leq p_0$, precisamos achar $\pi_1, ..., \pi_k \in M$ e uma fórmula $\phi(x_0, x_1, ..., x_k)$ que bem-reflete q em $(M, \pi_1, ..., \pi_k)$

Defina $q|M = (a_q \cap M, f_q|M, A_q \cap M)$ e $\delta = M \cap \omega_1$. Segue do Lema A.9 que $\delta = rank(M)$. Além disso, como $\mathcal{F}$ é um conjunto estacionário codificador, segue do Lema A.8 que $A_q \cap M = A_{q|M} = \{X \in A_q : X \in M, X \subsetneq X_0\}$. O fato que $[M]^{\leq\aleph_0} \subseteq M$ implica que $a_{q|M}, A_{q|M} \in M$. Mais ainda, como $q \in \mathbb{P}$ e $X_0 = M \cap \omega_2$, segue da condição d) da Definição A.16 que $f_{q|M} \in M$, ou seja, temos que $q|M \in M \cap \mathbb{P}$.

É claro que $q|M \leq p$.

Segue do Lema A.10 e do fato que $[M]^{\leq\aleph_0} \subseteq M$ que existe uma família $\mathcal{Z} \in M$, $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{F}$, tal que $\bigcup\{X \cap M :\ rank(X) < \delta,\ X \in A_q\} \subseteq \bigcup \mathcal{Z}$. Como $\mathcal{F}$ é cofinal (estacionário) em

$[\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ e pela elementaridade de M, existe $Z \in \mathcal{F} \cap M$ tal que $\bigcup\{X \cap M : \ rank(X) < \delta, \ X \in A_q\} \subseteq Z$.

Seja $\phi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ a fórmula que diz que x_0 é uma condição da ordem parcial x_4 que estende a condição x_3 e tal que a diferença entre a primeira coordenada de x_0 e x_2 é disjunta de x_1.

Afirmação. *$\phi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ é uma fórmula que bem-reflete q em $(M, Z, a_{q|M}, q|M, \mathbb{P})$. Além disso, se M satisfaz $\phi(s, Z, a_{q|M}, q|M, \mathbb{P})$, $r \leq q, s$ e $h : (a_s \setminus a_{q|M}) \otimes (a_q \setminus a_{q|M}) \to [\omega_2]^{<\aleph_0}$ é uma função que satisfaz*

$$h(\{\xi, \eta\}) \subseteq \min(\{\xi, \eta\}) \cap \bigcap\{X \in A_q : \xi, \eta \in X, \ \xi \neq \eta, \ rank(X) \geq \delta\},$$

(convencionando que a intersecção da família vazia é ω_2), podemos supor, sem perda de generalidade, que $f_r|(a_s \setminus a_{q|M}) \otimes (a_q \setminus a_{q|M}) = h$.

Demonstração da Afirmação. É claro que $H(\theta)$ satisfaz $\phi(q, Z, a_{q|M}, q|M, \mathbb{P})$. Pela elementaridade de M, existe $s \in M$ tal que $\phi(s, Z, a_{q|M}, q|M, \mathbb{P})$, ou seja, s é uma condição de $\mathbb{P}$ que estende $q|M$ e $a_s \setminus a_{q|M} \cap Z = \emptyset$. Seja $h : (a_s \setminus a_{q|M}) \otimes (a_q \setminus a_{q|M}) \to [\omega_2]^{<\aleph_0}$ satisfazendo

$$h(\{\xi, \eta\}) \subseteq \min(\{\xi, \eta\}) \cap \bigcap\{X \in A_q : \xi, \eta \in X, \ \xi \neq \eta, \ rank(X) \geq \delta\}$$

.

Defina $r = (a_r, f_r, A_r)$ da seguinte maneira: $a_r = a_s \cup a_q$, $f_r = f_s \cup f_q \cup h$ e $A_r = A_s \cup A_q$. É fácil ver que r satisfaz as condições a), b) e c) da Definição A.16. Vejamos que r satisfaz a condição d) da Definição A.16: sejam $\xi, \eta \in a_r$, $\xi \neq \eta$, e $X \in A_r$.

Caso 1. $\xi, \eta \in a_s$ e $X \in A_s$.

Este caso é trivial, já que $s \in \mathbb{P}$.

Caso 2. $\xi, \eta \in a_q$ e $X \in A_q$.

Este caso é trivial, já que $q \in \mathbb{P}$.

Caso 3. $\xi, \eta \in a_s$ *e* $X \in A_q$.

Como M satisfaz $\phi(s, Z, a_{q|M}, q|M, \mathbb{P})$, temos duas possibilidades: ou $rank(X) \geq \delta$ ou $rank(X) < \delta$.

Se $rank(X) \geq \delta = M \cap \omega_1 = rank(M)$, temos que $f_r(\{\xi, \eta\}) = f_s(\{\xi, \eta\}) \subseteq M \cap \min\{\xi, \eta\} \subseteq X$ pelo Lema A.6. Daí, como $s \in M$, segue que $M \cap \omega_2 \in \mathcal{F}$ e temos que r satisfaz a condição d) da Definição A.16.

Se, por outro lado, $rank(X) < \delta$, pela definição de ϕ e Z temos que $\xi, \eta \in a_s \cap a_q$ e segue do Caso 2 que r satisfaz a condição d) da Definição A.16.

Caso 4. $\xi, \eta \in a_q$ *e* $X \in A_s$.

Aqui, temos que $\xi, \eta \in M$, ou seja, $\xi, \eta \in a_s \cap a_q$ e segue do Caso 1 que r satisfaz a condição d) da Definição A.16.

Caso 5. $\xi \in a_s \setminus a_q$ e $\eta \in a_q \setminus a_s$.

Neste caso, temos que $X \in A_q$ e, pela definição de ϕ e Z, temos que $rank(X) \geq \delta$. Mas $f_r(\{\xi, \eta\}) = h(\{\xi, \eta\})$ e segue que r satisfaz a condição d) da Definição A.16.

Concluímos assim a demonstração da afirmação e do lema. $\square$

Definição A.18. *Dado* $p \in P$, *o suporte de* p, *supp*(p), *é o conjunto* $a_p \cup \bigcup A_p$.

Definição A.19. *Dizemos que duas condições* $p, q \in \mathbb{P}$ *são isomorfas (via* $\pi : supp(p) \to supp(q)$*) se* $\pi : supp(p) \to supp(q)$ *é uma bijeção que preserva ordem, constante em* $supp(p) \cap supp(q)$ *e tal que* $\pi[a_p] = a_q$, $\{\pi[X] : X \in A_p\} = A_q$ *e para todo* $\alpha, \beta \in a_p$, $f_q(\pi(\alpha), \pi(\beta)) = f_p(\alpha, \beta)$.

Lema A.20. *Sejam* $p, q \in \mathbb{P}$ *duas condições isomorfas via* $\pi : supp(p) \to supp(q)$. *Seja* $\Delta = supp(p) \cap supp(q)$ *e seja* $r \leq p$ *tal que* $supp(r) \cap supp(q) = \Delta$. *Se* $h : (a_r \setminus \Delta) \otimes (a_q \setminus \Delta) \to [\omega_2]^{<\aleph_0}$ *é uma função tal que, para todo* $\xi \in a_r \setminus \Delta$ *e todo* $\eta \in a_q \setminus \Delta$, $h(\{xi, \eta\}) \subseteq \min\{\xi, \eta\}$, *existe* $s \leq r, q$ *tal que* $a_s = a_r \cup a_q$, $A_s = A_r \cup A_q$ *e* $f_s = f_r \cup f_q \cup h$.

Demonstração. Precisamos verificar apenas que $s \in \mathbb{P}$. É claro que s satisfaz as condições a), b) e c) da Definição A.16. Resta verificar que s satisfaz a condição d) da Definição A.16.

Sejam $\xi, \eta \in a_s$, $\xi \neq \eta$, e $X \in A_s$.

Caso 1. $\xi, \eta \in a_r$.

Se $X \in A_r$, segue diretamente do fato que $r \in \mathbb{P}$. Senão, $X \in A_q$ e $\xi, \eta \in X$. Daí, $\xi, \eta \in \Delta$ e, portanto, $\xi, \eta \in \pi^{-1}[X] \in A_p \subseteq A_r$ e como $r \in \mathbb{P}$, segue que a condição d) da Definição A.16 é satisfeita neste caso.

Caso 2. $\xi, \eta \in a_q$.

Se $X \in A_q$, segue diretamente do fato que $q \in \mathbb{P}$. Senão, $X \in A_r$ e $\xi, \eta \in X$. Daí, $\xi, \eta \in \Delta$ e, portanto, $\xi, \eta \in \pi^{-1}[X] \in A_q$ e como $q \in \mathbb{P}$, segue que a condição d) da Definição A.16 é satisfeita neste caso.

Caso 3. $\xi \in a_r \setminus a_q$, $\eta \in a_q \setminus a_r$.

Observe que não existe $X \in A_s$ tal que $\xi, \eta \in X$. Como, neste caso, $f_s(\{\xi, \eta\}) = h(\{\xi, \eta\}) \subseteq \min\{\xi, \eta\}$, segue que a condição d) da Definição A.16 também é satisfeita neste caso. □

Lema A.21. *Assumindo a hipótese do contínuo, o* forcing $\mathbb{P}$ *é* ω_2*-c.c. e, portanto,* $\mathbb{P}$ *preserva cardinais.*

Demonstração. Para cada $\alpha < \omega_2$, sejam $p_\alpha = (a_\alpha, f_\alpha, A_\alpha) \in \mathbb{P}$. Por um argumento usual de contagem, podemos garantir, usando a hipótese do contínuo, que existem $\alpha < \beta < \omega_2$ tais que p_α e p_β são isomorfos. Daí, fixe $h : (a_\alpha \setminus a_\beta) \otimes (a_\beta \setminus a_\alpha) \to [\omega_2]^{<\aleph_0}$ arbitrária e defina $q = (a_q, f_q, A_q)$ por: $a_q = a_\alpha \cup a_\beta$, $f_q = f_\alpha \cup f_\beta \cup h$ e $A_\alpha \cup A_\beta$. Segue do lema anterior que $q \in \mathbb{P}$ e concluímos que $\mathbb{P}$ é ω_2-c.c. e preserva, portanto, cardinais maiores ou iguais a $\aleph_2$.

Por outro lado, segue do Lema A.17, que $\mathbb{P}$ é simplesmente $\mathcal{F}$-próprio. Daí, pelo Lema A.15 que $\mathbb{P}$ é $\mathcal{F}$-próprio e, então, pelo Lema A.12, temos que $\mathbb{P}$ preserva $\aleph_1$. Portanto, temos que $\mathbb{P}$ preserva cardinais. □

Teorema A.22. *Em* $V^{\mathbb{P}}$*, existe uma função* $f : [\omega_2]^2 \to [\omega_2]^{\leq\aleph_0}$ *tal que para todo* $\xi < \eta < \omega_2$*,* $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq \xi$ *e se* A *é uma família não-enumerável de subconjuntos finitos de* ω_2 *que forma um* Δ*-sistema, então existem* $a, b \in A$ *e uma bijeção* $e : a \to b$ *que preserva ordem constante em* $a \cap b$ *e tal que para todo* $\xi \in a$*,* $\xi \leq e(\xi)$ *e para todo* $\zeta \in a \cap b$*, todo* $\xi \in a \setminus b$ *e* *todo $\eta \in b \setminus a$:*

(i) se $\zeta < \xi$, então $f(\{\zeta, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(ii) se $\zeta < \eta$, então $f(\{\zeta, \xi\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(iii) $a \cap \xi \cap \eta \subseteq f(\{\xi, \eta\})$.

Demonstração. Seja G um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre V e considere $f = \bigcup\{f_p : p \in G\}$. Seja $\dot{f}$ um nome para f.

Fixe uma família não-enumerável $\{\dot{a}_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq [\omega_2]^n$ de nomes para subconjuntos finitos de ω_2 que formam um Δ-sistema. Sem perda de generalidade, podemos assumir que existe $n \in \mathbb{N}$ e para todo $\alpha < \omega_1$ existem $\dot{a}_1^\alpha, \dots, \dot{a}_n^\alpha$ nomes para elementos de ω_2 tais que $\dot{a}_\alpha = \{\dot{a}_1^\alpha, \dots, \dot{a}_n^\alpha\}$.

Seja $p \in P$. Considere $M \prec H(\omega_3)$ tal que $M \cap \omega_2 = X_0 \in \mathcal{F}$, p, $\mathbb{P}$, $\mathcal{F} \in M$ e $\{\dot{a}_\alpha : \alpha < \omega_1\} \in M$. Mostremos que existem $\alpha < \beta < \omega_1$ e $r \leq p$ tais que r força que as condições i), ii) e iii) do enunciado são satisfeitas para $\dot{a}_\alpha$ e $\dot{a}_\beta$.

Primeiramente, seja $p_0 \leq p$ dada por $a_p = a_{p_0}$, $f_p = f_{p_0}$, $A_p = A_{p_0} \cup \{X_0\}$.

Sejam $q \leq p_0$ e $\alpha \in \omega_1$ tais que existe b tal que $b \setminus M \neq \emptyset$, q força que $\dot{a}_\alpha = \check{b}$ e $b \subseteq a_q$. Podemos fazer isso já que $\{\dot{a}_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ é uma seqüência de nomes para elementos de um Δ-sistema não-enumerável de conjuntos e $|M| = \aleph_0$. Como na demonstração do Lema A.17, obtemos $s \geq q|M$ satisfazendo $\phi(s, Z, a_{q|M}, q|M, \mathbb{P})$ da Afirmação do Lema A.17. Novamente, pela disjunção dos conjuntos e pela elementaridade de M, podemos obter s e β tais que M satisfaz $\phi(s, Z, a_{q|M}, q|M, \mathbb{P})$ e existe $a \in [M \setminus Z]^{<\aleph_0}$ tal que q força que $\dot{a}_\beta = \check{a}$ e $a \subseteq a_s$.

Segue da Afirmação do Lema A.17 que podemos definir

$$h(\{\xi, \eta\}) = D \cap \min\{\xi, \eta\} \cap \bigcap\{X \in A_q : \xi, \eta \in X, rank(X) \geq \delta\},$$

para $\xi \in a \setminus b$ e $\xi \in b \setminus a$, onde

$$D = (a \cup b) \cup \bigcup\{f_r(\{\zeta, \xi\}) : \zeta \in a \cap b, \zeta < \eta\} \cup \bigcup\{f_r(\{\zeta, \eta\}) : \zeta \in a \cap b, \zeta < \xi\},$$

obtendo r como no Lema A.17, $r \leq p$.

Resta verificar que as condições i), ii) e iii) do enunciado estão satisfeitas para a, b e f_r como acima. Isso é suficiente, já que r força que $\dot{a}_\alpha = \check{b}$, $\dot{a}_\beta = \check{a}$ e $f_r \subseteq \dot{f}$. Sejam então $\xi \in a \setminus b$ e $\eta \in b \setminus a$ e note que segue do Lema A.6 que se $\xi, \eta \in X \in A_q$ e $rank(X) \geq \delta$, então $X_0 \cap \xi \subseteq X$.

Para verificar i), seja $\zeta \in a \cap b$ e suponha que $\zeta < \xi$. Observe que $\min\{\zeta, \eta\} \leq \min\{\xi, \eta\}$ e daí, pela definição de f_r, temos que $f_r(\{\xi, \eta\}) = h(\{\xi, \eta\})$ e, portanto, $f_r(\{\zeta, \eta\}) \subseteq D \cap \min\{\xi, \eta\}$. Seja agora $X \in A_q$ tal que $\xi, \eta \in X$ e $rank(X) \geq \delta$ e mostremos que $f_r(\{\zeta, \eta\}) \subseteq X$. Como $\zeta \in a \cap \xi \subseteq M \cap \xi \subseteq X_0 \cap \xi \subseteq X$ e como $r \leq q$ e $q \in \mathbb{P}$, segue que $f_r(\{\zeta, \eta\}) = f_q(\{\zeta, \eta\}) \subseteq X$, como queríamos.

Para verificar ii), seja $\zeta \in a \cap b$ e suponha que $\zeta < \eta$. Observe que $\min\{\zeta, \xi\} \leq \min\{\xi, \eta\}$ e daí, pela definição de f_r, temos que $f_r(\{\xi, \eta\}) = h(\{\xi, \eta\})$ e, portanto, $f_r(\{\zeta, \xi\}) \subseteq D \cap \min\{\xi, \eta\}$. Seja agora $X \in A_q$ tal que $\xi, \eta \in X$ e $rank(X) \geq \delta$ e mostremos que $f_r(\{\zeta, \xi\}) \subseteq X$. Como $\zeta, \xi \in a \subseteq M \cap \omega_2 = X_0$ e como $r \leq s$ e $s \in \mathbb{P}$, segue que $f_r(\{\zeta, \xi\}) = f_s(\{\zeta, \xi\}) \subseteq X_0 \cap \min\{\zeta, \xi\} \subseteq X$, como queríamos.

Finalmente, observe que $a \cap \xi \cap \eta \subseteq D \cap \min\{\xi, \eta\}$ e como $a \cap \xi \subseteq M \cap \xi \subseteq X_0 \cap \xi \subseteq X$, segue que $a \subseteq f_r(\{\xi, \eta\})$ e concluímos a demonstração de iii) e do teorema. $\square$

Apêndice B

Constructions génériques d'espaces d'Asplund C(K)

Un espace de Banach X est dit d'Asplund si toute fonction réelle continue et convexe, définie sur X, est Fréchet-différentiable en chaque point d'un sous-ensemble G_δ dense de X.

En 1975, Asplund [2] a montré que les espaces d'une certaine classe d'espaces de Banach qui inclut les espaces $c_0(\Gamma)$ (où Γ est n'importe quel ensemble) et les espaces réflexifs ont cette propriété. Depuis, de nombreuses caractérisations des espaces d'Asplund sont apparues dans la littérature (voir, par exemple, [29], [42] et [46]) et ces espaces jouent, aujourd'hui, un rôle important dans la théorie des espaces de Banach et, plus particulièrement, dans la théorie des renormages.

Pour tout espace de Banach séparable X, une conjonction de résultats dûs à plusieurs mathématiciens, y compris Asplund, Gregory, Kadec, Klee, Namioka, Phelps et Stegall, parmi d'autres, implique que X admet un renormage Fréchet-différentiable si et seulement si X admet une fonction bosse Fréchet-différentiable et si et seulement si X est un espace d'Asplund.

Il est alors naturel de poser la question suivante: que se passe-t-il dans le cas non séparable?

Pour n'importe quel espace de Banach il est facile de construire, à partir d'une norme équivalente Fréchet-différentiable, une fonction bosse Fréchet-différentiable, et on peut montrer que si X admet une fonction bosse Fréchet-différentiable, alors X est un espace d'Asplund. Il reste donc à vérifier si les implications réciproques sont vraies.

La classe des espaces de Banach $C(K)$ fournit des exemples intéressants d'espaces de Banach non séparables (voir, par exemple, [9], [24], [39], [40], [48] et [52]). Ici, la situation est semblable: plusieurs exemples intéressants d'espaces d'Asplund non séparables sont des espaces $C(K)$. Namioka et Phelps [46] ont prouvé que pour tout espace compact K (ou localement compact L), nous avons que $C(K)$ (ou $C_0(L)$) est d'Asplund si et seulement si K (ou L) est clairsemé, c'est-à-dire, si tout sous-ensemble de K (ou de L) possède des points isolés.

Les exemples d'espaces compacts clairsemés les plus simples à définir sont: le compactifié d'Alexandroff d'un espace discret; et un ordinal successeur avec la topologie de l'ordre. Mazurkiewicz et Sierpiński [44] ont montré que tout espace compact, métrique et clairsemé est homéomorphe à un ordinal dénombrable avec la topologie de l'ordre.

Toutefois, nous sommes intéressés par les espaces d'Asplund non séparables et, donc, nous ne considérons que les espaces compacts et clairsemés non métrisables. Il existe dans la littérature de nombreuses constructions de tels espaces qui ne sont pas homéomorphes à des ordinaux et qui sont construits par de méthodes ensemblistes: ([49], [17], [56], [28]) et même de tels espaces qui sont compacts ou localement compacts ([3], [38], [36]). Le premier exemple d'un espace compact et clairsemé dont la hauteur est $\aleph_2$ et la largeur est dénombrable est celui de Baumgartner et Shelah [5], obtenu par *forcing*.

Rappelons-nous que nous sommes intéressés par les propriétés des espaces d'Asplund $C(K)$ non séparables et retournons aux questions que nous nous sommes posées: est-ce que tout espace d'Asplund possède une norme équivalente Fréchet-différentiable ou admet une fonction bosse Fréchet-différentiable, comme chez les espaces d'Asplund séparables?

Haydon [25] construit un arbre T tel que $C_0(T)$ n'admet pas de renormage Gâteaux-différentiable. Les arbres sont des espaces localement compacts et clairsemés et, donc, nous avons que $C_0(T)$ est un espace d'Asplund; puisque la Fréchet-différentiabilité d'une fonction implique sa Gâteaux-différentiabilité, un tel espace est un exemple d'espace d'Asplund sans renormage Fréchet-différentiable.

Par contre, Haydon [26] prouve que pour tout arbre T, $C_0(T)$ admet une fonction bosse Fréchet-différentiable, de sorte que l'exemple construit dans son travail précédent, aussi bien que ceux associés à n'importe quel arbre, ne répond pas à la question suivante, toujours sans réponse: existe-t-il un espace d'Asplund qui n'admet pas de fonction bosse Fréchet-différentiable?

Dans l'espoir de répondre négativement à cette question par l'exemple d'un espace $C(K)$, le résultat de Haydon nous oblige à chercher des exemples d'espaces compacts (ou localement compacts) et clairsemés non métrisables, qui ne sont pas des arbres.

L'espace $C(K)$, où K est le compact de Kunen (dont la construction est reproduite dans [48]), est un des espaces de fonctions continues les plus importants du point de vue de la théorie des espaces de Banach : K est un espace compact clairsemé, construit sous l'hypothèse du continu et dont toute puissance finie est héréditairement séparable. On peut alors prouver que l'espace d'Asplund $C(K)$ correspondant n'admet pas de renormage Fréchet-différentiable ni de système biorthogonal non dénombrable (voir [31] et [47]). Cependant, on ne sait pas si $C(K)$ admet un renormage Gâteaux-différentiable ni si $C(K)$ admet une fonction bosse Fréchet-différentiable. Les espaces que nous étudions dans ce travail possèdent des propriétés similaires.

Notre but est de présenter une méthode de construction par *forcing* d'espaces compacts et clairsemés non métrisables K et d'analyser les propriétés topologiques et géométriques des espaces d'Asplund $C(K)$ correspondants. Cette méthode est fondée sur l'espace construit par Rabus [53] pour montrer la consistance de l'existence d'un espace initialement ω_1-compact de *tightness* dénombrable et non compact[1], ce qui répond à une question de Dow et van Douwen. L'idée de cette construction vient de celle de Baumgartner et Shelah [5]. Dans [33], Juhasz et Soukup font un abordage alternatif de la construction de Rabus, par

[1]N.B. De fait, Rabus [53] a construit une algèbre de Boole superatomique, dont l'espace de Stone possède un point distingué, de sorte que, si nous retirons ce point-là, l'espace obtenu a les propriétés mentionnées.

un langage topologique au lieu du langage des algèbres de Boole.

Le travail est composé de quatre chapitres suivis d'une annexe.

1. Définitions et résultats préliminaires

Dans le premier chapitre nous dressons simplement une liste des résultats déjà connus qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

2. Constructions d'espaces clairsemés génériques

Dans le deuxième chapitre, nous présentons la méthode de construction d'espaces compacts clairsemés que nous avons déjà mentionnée: nous définissons un *forcing* qui introduit une topologie sur un ordinal non dénombrable $\theta \leq \omega_2$, qui dépend, comme dans [33], d'une fonction qui associe un sous-ensemble dénombrable de θ à chaque paire de θ. Les propriétés de f ont une influence sur les propriétés de la topologie introduite sur θ:

Définition 1. *Soient $\theta \leq \omega_2$ un ordinal non dénombrable et $f : [\theta]^2 \to [\theta]^{\leq\aleph_0}$ une fonction telle que pour tous $\xi, \eta \in \theta$, $\xi \neq \eta$, $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq \min\{\xi, \eta\}$. Soit $\mathbb{P}_f$ le* forcing *des conditions $p = (D_p, h_p, i_p)$, où:*

1. $D_p \in [\theta]^{<\aleph_0}$;

2. $h_p : D_p \to \wp(D_p)$ et pour tout $\xi \in D_p$, on a que $\max h_p(\xi) = \xi$;

3. $i_p : [D_p]^2 \to [D_p]^{<\aleph_0}$ et pour tous $\xi, \eta \in D_p$, $\xi < \eta$, on a que:

(a) si $\xi \in h_p(\eta)$, alors $h_p(\xi) \setminus h_p(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_p(\{\xi,\eta\})} h_p(\gamma)$,

(b) si $\xi \notin h_p(\eta)$, alors $h_p(\xi) \cap h_p(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i_p(\{\xi,\eta\})} h_p(\gamma)$,

(c) et $i_p(\{\xi, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

ordonné par $p \leq q$ si $D_p \supseteq D_q$ et pour tout $\xi \in D_q$, $h_p(\xi) \cap D_q = h_q(\xi)$ et $i_p|_{[D_q]^2} = i_q$.

Ensuite nous montrons que ce *forcing* introduit une topologie sur θ de sorte que nous obtenons un espace compact clairsemé non métrisable: fixons V un modèle et G un filtre générique sur $\mathbb{P}_f$.

Définition 2. *Pour chaque $\xi < \eta < \theta$, soit, dans $V[G]$,*

$$h(\xi) = \bigcup_{p \in G} h_p(\xi) \quad \textit{et} \quad i(\{\xi, \eta\}) = \bigcup_{p \in G} i_p(\{\xi, \eta\}).$$

Il est facile de voir que pour chaque $\xi < \theta$, $\xi = \max h(\xi)$ et que si pour n'importe quels $\xi < \eta < \theta$, on dénote

$$h(\xi) * h(\eta) = \begin{cases} h(\xi) \setminus h(\eta) & \textit{si } \xi \in h(\eta), \\ h(\xi) \cap h(\eta) & \textit{si } \xi \notin h(\eta), \end{cases}$$

alors $i(\{\xi, \eta\})$ est un sous-ensemble fini de ξ tel que

$$h(\xi) * h(\eta) \subseteq \bigcup_{\gamma \in i(\{\xi, \eta\})} h(\gamma).$$

Dans $V[G]$, soit L l'espace topologique générique $L = (\theta, \tau)$, où τ est la topologie sur θ qui possède l'ensemble

$$\{h(\xi) : \xi < \theta\} \cup \{L \setminus h(\xi) : \xi < \theta\}$$

comme sous-base. Nous appelons $h(\xi)$ voisinage générique de ξ.

Nous prouvons quelques propriétés du *forcing* et de l'espace L qui seront utilisées dans les chapitres suivants.

Puis, nous prouvons deux lemmes combinatoires qui assurent l'existence d'amalgamations, c'est-à-dire, d'extensions communes à deux conditions spécifiques du *forcing*, sous quelques hypothèses concernant ces deux conditions: les Lemmes 2.13 et 2.14. Le Lemme 2.13 a des hypothèses assez fortes sur les conditions du *forcing*, mais qui assurent la possibilité de construire une amalgamation qui "copie une condition dans l'autre". Dans le Lemme 2.14, nous mixturons des idées des amalgamations introduites dans [33] et [53] et celles du Lemme 2.13. Dans le deuxième lemme, les hypothèses sur les conditions sont moins fortes alors que la difficulté augmente.

3. Un espace d'Asplund et ses propriétés topologiques

Dans le troisième chapitre, nous fixons $\theta = \omega_1$ et $f = \min$ et nous obtenons un espace localement compact clairsemé L_1 de poids $\aleph_1$, de sorte que $C(K_1)$ est un espace d'Asplund non séparable, où $K_1 = L_1 \cup \{*\}$ est la compactification d'Alexandroff de L_1. Comme la fonction f ici est simple et possède des propriétés fortes, nous obtenons les hypothèses du Lemme 2.13 et nous montrons le théorème suivant:

Théorème 1. *Toute puissance finie de K_1 est héréditairement séparable.*

Après, nous déduisons le résultat suivant à propos de l'espace de Banach $C(K_1)$:

Théorème 2. *$C(K_1)$ est un espace d'Asplund de densité $\aleph_1$ qui ne possède pas de système biorthogonal non dénombrable, ni de renormage Fréchet-différentiable.*

Puis, nous modifions le Lemme 5.4 de Rabus [53] pour montrer la proposition suivante:

Proposition 1. *Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{C(K_1)^*}$ est une suite convergente vers δ_* dans la topologie faible-étoile, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, on a que $\mu_n(\{*\}) \neq 0$.*

Finalement, nous utilisons cette proposition pour fournir un nouvel exemple d'un espace qui possède la propriété (C) et qui ne possède pas la propriété (E): la propriété (C) a été introduite par Corson dans [12]: un espace de Banach a la propriété (C) si toute famille d'ensembles convexes et fermés dont l'intersection est vide possède une sous-famille dénombrable dont l'intersection est vide; la propriété (E) a été introduite par Efremov dans [18]: on dit qu'un espace de Banach X possède la propriété (E) si pour tout ensemble convexe et borné C de X^*, si $\varphi \in \overline{C}^{w^*}$, alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ telle que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans la topologie faible-étoile. On montre, en effet, le résultat suivant:

Théorème 3. *$C(K_1)$ possède la propriété (C) de Corson et ne possède pas la propriété (E) de Efremov.*

Le premier exemple d'un espace qui possède la propriété (C) et qui ne possède pas la propriété (E) est une modification (non publiée) dûe à Justin T. Moore de l'espace d'Ostaszewski [49] (qui suppose le principe $\diamondsuit$).

4. Un espace d'Asplund qui ne possède pas de système biorthogonal non dénombrable

Dans le quatrième chapitre, nous fixons $\theta = \omega_2$ et $f : [\omega_2]^2 \to [\omega_2]^{<\omega}$ telle que pour tous $\xi < \eta < \theta$, $f(\{\xi, \eta\}) \subseteq \xi$ et si A est une famille non dénombrable de sous-ensembles finis de ω_2 qui forment un Δ-système, alors il existe $a, b \in A$ et une bijection $e : a \to b$ qui préserve l'ordre qui est constante sur $a \cap b$ et tels que pour tout $\xi \in a$, $\xi \leq e(\xi)$ et pour tout $\zeta \in a \cap b$, tout $\xi \in a \setminus b$ et tout $\eta \in b \setminus a$:

(i) si $\zeta < \xi$, alors $f(\{\zeta, \eta\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(ii) si $\zeta < \eta$, alors $f(\{\zeta, \xi\}) \subseteq f(\{\xi, \eta\})$;

(iii) $a \cap \xi \cap \eta \subseteq f(\{\xi, \eta\})$.

La consistance de l'existence d'une telle fonction est un résultat non publié dû à Koszmider dont la preuve se trouve dans l'Annexe A. Nous obtenons un espace localement compact clairsemé L_2 de poids $\aleph_2$, de sorte que $C(K_2)$ est un espace d'Asplund non séparable, où $K_2 = L_2 \cup \{*\}$ est le compactifié d'Alexandroff de L_2. Notre but principal dans ce chapitre est d'analyser les propriétés des espaces K_2 et $C(K_2)$.

Grâce aux propriétés de la fonction f, nous obtenons les hypothèses de l'autre lemme-clef prouvé dans le Chapitre 2 et nous montrons le résultat suivant:

Théorème 4. *Toute puissance finie de K_2 est héréditairement séparable.*

Puis, nous prouvons le fait suivant:

Théorème 5. *La hauteur de K_2 est ω_2.*

Nous avons, donc, le premier exemple consistant d'un espace compact et clairsemé, héréditairement séparable dont la hauteur est ω_2. Rappelons-nous que l'hypothèse du continu implique qu'il n'existe pas d'espace compact et clairsemé de hauteur ω_2 et largeur dénombrable et Just [35] a utilisé le *forcing* de Cohen pour montrer que la non existence de tels espaces est consistante avec la négation de l'hypothèse du continu. Le premier exemple d'un espace compact et clairsemé dont la hauteur est ω_2 et la largeur est dénombrable est celui construit par Baumgartner et Shelah [5].

Ensuite, nous déduisons le théorème suivant:

Théorème 6. *K_2 est un espace tel que le degré de Lindelöf héréditaire de K_2 est strictement plus grand que le cardinal successeur de la densité héréditaire de K_2, c'est-à-dire, $hL(K_2) \not\leq hd(K_2)^+$.*

Ce résultat s'oppose au résultat qui assure l'inégalité duale, dû à Shapirovskiĭ [62]: pour tout espace compact K, nous avons que $hd(K) \leq hL(K)^+$.

Finalement, nous déduisons quelques propriétés de l'espace de Banach $C(K_2)$:

Théorème 7. *$C(K_2)$ est un espace d'Asplund de densité $\aleph_2$ qui ne possède pas de systèmes biorthogonaux non dénombrables, ni de renormage Fréchet-différentiable.*

Donc, $C(K_2)$ est le premier exemple d'un espace de Banach non séparable qui ne possède pas de systèmes biorthogonaux non dénombrables et dont la densité est $> \aleph_1$. Ce fait s'oppose au résultat suivant dû à Todorcevic [65]: tout espace $C(K)$ de densité $> \aleph_1$ possède un système semi-biorthogonal non dénombrable.

Ainsi, notre espace montre que ce résultat ne peut pas être généralisé, en remplaçant l'existence d'un système semi-biorthogonal non dénombrable par l'existence d'un système biorthogonal non dénombrable, ce qui répond à une question posée par Todorcevic.

A. *Morasses* et la propriété Δ

Dans l'Annexe A, nous présentons la construction d'un *forcing*, qui utilise les *morasses* simplifiés de Velleman (voir [66] et [67]), qui force l'existence d'une fonction comme celle dont nous avons besoin au Chapitre 4: c'est un résultat non publié de Koszmider.

Referências Bibliográficas

[1] P. Alexandroff, *Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume*, Math. Ann. **92** (1924), no. 3-4, 294–301.

[2] E. Asplund, *Fréchet differentiability of convex functions*, Acta Math. **121** (1968), 31–47.

[3] J. Bagaria, *Locally-generic Boolean algebras and cardinal sequences*, Algebra Universalis **47** (2002), no. 3, 283–302.

[4] J. E. Baumgartner, *Applications of the proper forcing axiom*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 913–959.

[5] J. E. Baumgartner and S. Shelah, *Remarks on superatomic Boolean algebras*, Ann. Pure Appl. Logic **33** (1987), no. 2, 109–129.

[6] C. Brech, *Aspectos combinatórios da geometria de espaços de Banach $C(K)$ com a propriedade de Grothendieck*, Master's thesis, Universidade de São Paulo, 2004.

[7] ———, *On the density of Banach $C(K)$ spaces with the Grothendieck property*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 12, 3653–3663.

[8] K. Ciesielski, *Set theory for the working mathematician*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 39, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[9] K. Ciesielski and R. Pol, *A weakly Lindelöf function space $C(K)$ without any continuous injection into $c_0(\Gamma)$*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **32** (1984), no. 11-12, 681–688.

[10] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 1143–1148.

[11] ______, *The independence of the continuum hypothesis. II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 105–110.

[12] H. H. Corson, *The weak topology of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 1–15.

[13] H. G. Dales and W. H. Woodin, *An introduction to independence for analysts*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 115, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[14] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler, *Smooth bump functions and geometry of Banach spaces*, Mathematika **40** (1993), no. 2, 305–321.

[15] ______, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 64, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[16] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, With a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys, No. 15.

[17] A. Dow and P. Simon, *Thin-tall Boolean algebras and their automorphism groups*, Algebra Universalis **29** (1992), no. 2, 211–226.

[18] N. M. Efremov, *A condition for a Banach space to be a dual*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. (1984), no. 4, 11–13.

[19] R. Engelking, *General topology*, second ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Polish by the author.

[20] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8, Springer-Verlag, New York, 2001.

[21] R. Fry and S. McManus, *Smooth bump functions and the geometry of Banach spaces: a brief survey*, Expo. Math. **20** (2002), no. 2, 143–183.

[22] J. R. Giles, D. A. Gregory, and B. Sims, *Characterisation of normed linear spaces with Mazur's intersection property*, Bull. Austral. Math. Soc. **18** (1978), no. 1, 105–123.

[23] A. S. Granero, M. Jiménez-Sevilla, and J.-P. Moreno, *Intersections of closed balls and geometry of Banach spaces*, Extracta Math. **19** (2004), no. 1, 55–92.

[24] R. Haydon, *A nonreflexive Grothendieck space that does not contain* l_∞, Israel J. Math. **40** (1981), no. 1, 65–73.

[25] ______, *A counterexample to several questions about scattered compact spaces*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), no. 3, 261–268.

[26] ______, *Trees in renorming theory*, Proc. London Math. Soc. (3) **78** (1999), no. 3, 541–584.

[27] R. Hodel, *Cardinal functions. I*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1–61.

[28] M. Hrušák, P. J. Szeptycki, and Á. Tamariz-Mascarúa, *Spaces of continuous functions defined on Mrówka spaces*, Topology Appl. **148** (2005), no. 1-3, 239–252.

[29] J. E. Jayne and C. A. Rogers, *Borel selectors for upper semicontinuous set-valued maps*, Acta Math. **155** (1985), no. 1-2, 41–79.

[30] T. Jech, *Set theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, The third millennium edition, revised and expanded.

[31] M. Jiménez Sevilla and J.-P. Moreno, *Renorming Banach spaces with the Mazur intersection property*, J. Funct. Anal. **144** (1997), no. 2, 486–504.

[32] I. Juhász, K. Kunen, and M. E. Rudin, *Two more hereditarily separable non-Lindelöf spaces*, Canad. J. Math. **28** (1976), no. 5, 998–1005.

[33] I. Juhász and L. Soukup, *How to force a countably tight, initially ω_1-compact and noncompact space?*, Topology Appl. **69** (1996), no. 3, 227–250.

[34] I. Juhász and W. Weiss, *On thin-tall scattered spaces*, Colloq. Math. **40** (1978/79), no. 1, 63–68.

[35] W. Just, *Two consistency results concerning thin-tall Boolean algebras*, Algebra Universalis **20** (1985), no. 2, 135–142.

[36] P. Koepke and J. C. Martínez, *Superatomic Boolean algebras constructed from morasses*, J. Symbolic Logic **60** (1995), no. 3, 940–951.

[37] P. Koszmider, *On a problem of Rolewicz about Banach spaces that admit support sets*, preprint.

[38] ______, *Forcing minimal extensions of Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 8, 3073–3117.

[39] ______, *Banach spaces of continuous functions with few operators*, Math. Ann. **330** (2004), no. 1, 151–183.

[40] ______, *A space $C(K)$ where all nontrivial complemented subspaces have big densities*, Studia Math. **168** (2005), no. 2, 109–127.

[41] K. Kunen, *Set theory. an introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[42] E. B. Leach and J. H. M. Whitfield, *Differentiable functions and rough norms on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 120–126.

[43] S. Mazur, *Über schwache Konvergenz in den Raumen L^p*, Studia Math. **4** (1933), 129–133.

[44] S. Mazurkiewicz and W. Sierpiński, *Contribution a la topologie des ensembles denombrables*, Fund. Math. **1** (1920), 17–27.

[45] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[46] I. Namioka and R. R. Phelps, *Banach spaces which are Asplund spaces*, Duke Math. J. **42** (1975), no. 4, 735–750.

[47] S. Negrepontis, *The Stone space of the saturated Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **141** (1969), 515–527.

[48] ______, *Banach spaces and topology*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1045–1142.

[49] A. J. Ostaszewski, *A countably compact, first-countable, hereditarily separable regular space which is not completely regular*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **23** (1975), no. 4, 431–435.

[50] A Plichko, *A Banach space without a fundamental biorthogonal system*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **254** (1980), no. 4, 798–802.

[51] A. Plichko and D. Yost, *Complemented and uncomplemented subspaces of Banach spaces*, Extracta Math. **15** (2000), no. 2, 335–371, III Congress on Banach Spaces (Jarandilla de la Vera, 1998).

[52] R. Pol, *A function space $C(X)$ which is weakly Lindelöf but not weakly compactly generated*, Studia Math. **64** (1979), no. 3, 279–285.

[53] M. Rabus, *An ω_2-minimal Boolean algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 8, 3235–3244.

[54] M. Rajagopalan, *A chain compact space which is not strongly scattered*, Israel J. Math. **23** (1976), no. 2, 117–125.

[55] F. Riesz, *Sur les opérations fonctionelles linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **149** (1909), 974–977.

[56] J. Roitman, *Basic S and L*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 295–326.

[57] ———, *Superatomic Boolean algebras*, Handbook of Boolean algebras, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1989, pp. 719–740.

[58] S. Rolewicz, *On convex sets containing only points of support*, Comment. Math. Special Issue **1** (1978), 279–281, Special issue dedicated to Władysław Orlicz on the occasion of his seventy-fifth birthday.

[59] H. P. Rosenthal, *The Banach spaces $C(K)$*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1547–1602.

[60] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions. Vol. I*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1971, Monografie Matematyczne, Tom 55.

[61] N. A. Shanin, *A theorem from the general theory of sets*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **53** (1946), 399–400.

[62] B. È. Shapirovskiĭ, *Cardinal invariants in compacta*, Seminar on General Topology, Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1981, pp. 162–187.

[63] S. Shelah, *Proper forcing*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 940, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[64] M. H. Stone, *Applications of the theory of boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), no. 3, 375–481.

[65] S. Todorcevic, *Biorthogonal systems and quotient spaces via Baire category methods*, Math. Ann. **335** (2006), no. 3, 687–715.

[66] D. Velleman, *Morasses, diamond, and forcing*, Ann. Math. Logic **23** (1982), no. 2-3, 199–281 (1983).

[67] ______, *Simplified morasses*, J. Symbolic Logic **49** (1984), no. 1, 257–271.

[68] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1885), no. II, 633–639, 789–805.

[69] V. Zizler, *Nonseparable Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1743–1816.

Índice Remissivo