Combinatória infinita e geometria de espaços de Banach

Christina Brech

Agosto de 2017

---

[*] Texto sistematizado apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para o Concurso de Livre Docência.

para todas as meninas que
gostam de matemática

Agradecimentos

Agradecer a algumas pessoas é correr o risco de esquecer ou chatear outras, o que certamente acontecerá, mas sendo talvez a última chance de fazer isso por escrito, vou arriscar. Começo agradecendo aos meus pais o apoio sempre incondicional, aos meus irmãos e cunhados, que me deram três sobrinhas-princesas, para meu deleite-desespero, e ao Alexandre, que me acompanhou em boa parte desta jornada depois do doutorado.

Agradeço também aos amigos de sempre: Eduardo, mais-que-amigo há mais de vinte anos; Natalia, mulher-força, sábia e parceira; Pri, mulher-menina, ingênua e fiel; e Marcos, esse amigo-irmão com quem tanto compartilho - desde a divergência política com a família, até os medos e prazeres de uma viagem de verão pela Bahia, para não falar dos temas censurados.

Passando aos matemáticos, queria poder agradecer ao Jorge Mujica, que deixou saudades ao nos deixar esse ano, e agradeço aos amigos e colaboradores Antonio Avilés, Jordi Lopez-Abad, Omar Selim, Pedro Tradacete, Piotr Koszmider, Stevo Todorcevic e Thiago Rodrigues Alves, sem os quais a matemática não teria a mesma graça. Dentre os amigos do IME, um obrigada muito especial aos quatro meninos - os cariocas Cristián e Ivan e os paulistas Alexandre e David - à companheira de tantas lutas Lucília, ao conselheiro e (ex-)vizinho Toninho e ao parceiro de aventuras Valentin. Obrigada por me ajudarem inúmeras vezes a encontrar um caminho em meio à fumaça.

Por fim, os amigos também imeanos André, Artur, Deborah, Lucia J., Lucia S., Pierluigi, Rodrigo e Zara, além dos de alhures Anne, Brice, Claribet, Leandro, María, Miguel e Pedro. Obrigada a toda essa turma de amigos matemáticos. É claro que há muitos outros amigos que fazem parte desta história e não foram citados aqui: sou grata a todos eles.

Daquelas que cantan as pombas i as frores,
Todos din que teñen alma de muller
Pois eu que n'as canto, virxe da Paloma
¡Ai!, ¿de que a terei?

(Rosalía de Castro)

Sumário

Introdução **1**

Preliminares **3**

1 Sistemas biortogonais **9**
- 1.1 Sistemas biortogonais cujas medidas têm suportes finitos . . 10
- 1.2 Sistemas biortogonais sob a dicotomia do P-ideal 14

2 Espaços universais **18**
- 2.1 O caso do espaço ℓ_∞/c_0 20
- 2.2 Existência de um espaço universal de densidade $\mathfrak{c}$ 24
- 2.3 A noção de universalidade nas distintas categorias 26
- 2.4 Espaços gerados por espaços de Hilbert 27

3 Espaços sem sequências subsimétricas **30**
- 3.1 Famílias homogêneas e bases de famílias 33
- 3.2 Interpolação e indução 36
- 3.3 Indução usando árvores binárias 37
- 3.4 Indução usando árvores mais gerais 40
- 3.5 Demonstração do resultado principal 42

Referências Bibliográficas **44**

Índice Remissivo **49**

Introdução

A área de geometria de espaços de Banach, cujo nascimento remonta à Stefan Banach [6], teve grande desenvolvimento na segunda metade do século XX, mas segue com problemas fundamentais em aberto, como é o caso do problema do quociente separável: todo espaço de Banach de dimensão infinita tem um quociente separável? A partir da década de 90, os métodos combinatórios apareceram como ferramenta importante na resolução de diversos problemas da área, como na solução dada por T. Gowers e B. Maurey em 1992 para o problema da sequência básica incondicional [33]. No século XXI, grandes matemáticos como S. Argyros, R. Haydon e S. Todorcevic seguem utilizando-se de métodos desta natureza no desenvolvimento de pesquisa na área (ver, por exemplo, [3, 56]).

Neste texto, apresentamos os principais resultados da pesquisa que desenvolvemos após a obtenção do título de doutorado em 2008, bem como perspectivas futuras para os trabalhos desenvolvidos ou em desenvolvimento na área de aplicações de métodos combinatórios em geometria de espaços de Banach.

As ferramentas combinatórias que utilizamos podem ser classificadas em três tipos:

1. A teoria de Ramsey e análise combinatória do comportamento de subconjuntos finitos de conjuntos infinitos, que foram utilizadas por matemáticos desde J. Schreier [50] e na clássica construção de B. Tsirelson [59]. Aqui consideramos estas ferramentas em conjuntos não enumeráveis, com ou sem estrutura adicional.

2. O método de *forcing*, que foi criado por P. Cohen [20, 21] para mostrar que o primeiro da lista de Hilbert do congresso de Paris de 1900 - o problema do contínuo de Cantor - é indecidível e pelo qual ele recebeu a medalha Fields em 1964. Nos anos 70, o método se tornou uma importante ferramenta combinatória na demonstração de que diversas afirmações são indecidíveis, em diferentes áreas da matemática.

Os exemplos mais marcantes foram as Conjecturas de Borel, de Kaplansky e de Whitehead.

3. Axiomas adicionais à teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, conhecida como ZFC, que permitem provar resultados de consistência e motivem demonstrações de resultados que não assumem axiomas adicionais. Axiomas como a hipótese do contínuo (CH) e o axioma de Martin (MA) já foram amplamente utilizados para a obtenção de exemplos ou resultados sobre espaços de Banach, como no exemplo topológico dado por K. Kunen (ver [44]), que possui consequências importantes em espaços de Banach.

Este trabalho contém três capítulos principais, além de um capítulo inicial que apresenta os fundamentos teóricos necessários para o desenvolvimento do texto.

No Capítulo 1 apresentamos uma continuação da pesquisa que desenvolvemos durante o doutorado, com resultados relacionados à existência de sistemas biortogonais em espaços de Banach não separáveis ou estruturas relacionadas a eles. Envolvem o uso de *forcing* e de axiomas adicionais em suas demonstrações, são fruto de nossa pesquisa em colaboração com P. Koszmider e S. Todorcevic e constam dos trabalhos [12, 19], e também com O. Selim, em andamento.

No capítulo seguinte, investigamos a existência de espaços de Banach universais de densidade igual ao cardinal do contínuo e obtemos uma série de resultados, sobretudo de consistência da não existência destes espaços, cuja existência muitas vezes pode ser provada assumindo a hipótese do contínuo. O método de *forcing* é amplamente utilizado neste capítulo. Uma longa e frutífera colaboração com P. Koszmider nos primeiros anos após a conclusão do doutorado resultou nestes resultados, publicados em [14, 15, 16, 17].

Finalmente, no Capítulo 3 introduzimos novas técnicas e conceitos combinatórios relacionados à teoria de Ramsey para mostrar um resultado sobre a não existência de sequências subsimétricas em espaços de Banach de densidade grande. Tais técnicas e conceitos têm sua relevância dentro do contexto combinatório, para além das aplicações que nos motivaram. É um trabalho desenvolvido conjuntamente com J. Lopez-Abad e S. Todorcevic ao longo dos últimos anos e publicado em [18].

Para a elaboração desses três capítulos, selecionamos os trabalhos de forma a dar coesão ao texto, que contém não apenas os enunciados dos principais resultados neles provados, mas também elementos de suas demonstrações. Além disso, apresentamos ao longo do texto alguns problemas em aberto e direções futuras de pesquisa.

Preliminares

Apresentamos aqui definições e resultados clássicos que utilizaremos nos capítulos seguintes, tendo como principal objetivo fixar a notação. Definições, resultados e notações que não introduzimos aqui podem ser encontradas nos textos [35] para a parte de teoria dos conjuntos, [28] para a topologia, [41] para o *forcing*, [1, 30] para a parte de espaços de Banach e [31, 51] para espaços de Banach $C(K)$. Nossa dissertação de mestrado [10] também contém a maior parte da notação e dos resultados necessários.

Teoria dos conjuntos

O cardinal de um conjunto X é denotado por $|X|$. Denotamos por ω o primeiro ordinal (e cardinal) infinito, por ω_1 o primeiro ordinal (e cardinal) não enumerável, por ω_2 o primeiro ordinal (e cardinal) de cardinalidade maior que ω_1, e assim sucessivamente, e por $\mathfrak{c}$ o cardinal do contínuo, ou seja, $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})|$. Consideramos de maneira geral apenas cardinais infinitos.

Lembramos que um cardinal κ é dito singular se existe uma família de conjuntos $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ tal que $|\Gamma| < \kappa$, $|X_\alpha| < \kappa$ para todo $\alpha \in \Gamma$ e $|\bigcup_{\alpha\in\Gamma} X_\alpha| = \kappa$. Um cardinal κ é regular se não é singular. Dados dois cardinais κ e λ, denotamos por $[\kappa]^{<\lambda}$ e $[\kappa]^{\leq\lambda}$ o conjunto de todos os subconjuntos de κ de cardinalidade menor e menor ou igual, respectivamente, a λ. Dados dois conjuntos X e Y, X^Y é o conjunto das funções de Y em X e $X^{<\omega}$ é o conjunto das sequências finitas de elementos de X .

Um Δ-sistema é uma família de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$ tal que $X_i \cap X_j = X_k \cap X_l$ para quaisquer $i, j, k, l \in I$ distintos e o Lema do Δ-sistema garante que dada qualquer família $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, existe $\Gamma \subseteq \omega_1$ não enumerável tal que $(X_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ é um Δ-sistema. O conjunto $X = X_i \cap X_j$ é chamado de raiz do sistema.

Axiomas adicionais

Chamamos de ZFC a axiomática usual da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha. Lembramos que uma afirmação é dita consistente (com ZFC) se sua negação não pode ser provada a partir de ZFC e independente (de ZFC) se ela e sua negação são ambas consistentes.

A hipótese do contínuo, que denotaremos por CH no que segue, é o axioma $\mathfrak{c} = \omega_1$, que é independente de ZFC. Outros axiomas adicionais que serão citados são o axioma de Martin (MA), o princípio $\diamondsuit$, o axioma do *forcing* próprio (PFA), o máximo de Martin (MM) e a dicotomia do P-ideal (PID), sendo que apenas esta última será usada e definida quando necessário.

Forcing

Não faremos aqui uma introdução completa ao método de *forcing* e indicamos [41] para a notação e teoria necessárias. Mas recordamos que o *forcing* é um método criado por Cohen em [20, 21] e usado para provar resultados de consistência e independência. Informalmente, é um método que parte de um modelo inicial V para ZFC e, a partir de uma ordem parcial $\mathbb{P}$, define outro modelo $V^{\mathbb{P}}$ para ZFC, de forma que as propriedades da ordem parcial $\mathbb{P}$ podem determinar a verdade de certas afirmações em $V^{\mathbb{P}}$. Usamos frequentemente a palavra *forcing* para nos referirmos à ordem parcial $\mathbb{P}$.

Dependendo do contexto, o modelo $V^{\mathbb{P}}$, chamado de extensão, é também denotado por $V[G]$, onde G é um filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre o modelo V. Na realidade, $V^{\mathbb{P}}$ e $V[G]$ não são exatamente o mesmo conjunto, mas sim, cada elemento de $V^{\mathbb{P}}$ codifica um elemento de $V[G]$: estes códigos são chamados de nomes ou $\mathbb{P}$-nomes e um nome para um elemento X de $V[G]$ é em geral denotado por $\dot{X}$. Os termos *genericidade* e *genérico* são usados para indicar uma espécie de aleatoriedade de um objeto com relação ao modelo V, ou seja, um objeto cujas características dependem fortemente de $\mathbb{P}$ e/ou G.

Assim, dizemos que um *forcing* $\mathbb{P}$ é κ-cc, onde κ é um cardinal, se $\mathbb{P}$ não possui anticadeias de cardinalidade κ, ou seja, se $(p_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é uma família em $\mathbb{P}$, então existem $\alpha < \beta < \kappa$ e $p \in \mathbb{P}$ tais que $p \leq p_\alpha$ e $p \leq p_\beta$. Neste caso, dizemos que p_α e p_β são compatíveis e usualmente nos referimos a um extensão comum p de p_α e p_β como uma amalgamação de p_α e p_β. Um *forcing* $\mathbb{P}$ é ccc se é ω_1-cc. Finalmente, dizemos que $\mathbb{P}$ é σ-fechado se para toda família $(p_n)_{n\in\omega}$ em $\mathbb{P}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$ para todo $n \in \omega$, existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p \leq p_n$ para todo $n \in \omega$. É frequentemente necessário provar que um *forcing* é ccc (ou ω_2-cc e σ-fechado) para garantir a preservação de cardinais, ou seja, que os cardinais no modelo inicial e na extensão são os mesmos.

Dados três cardinais κ, λ, μ, denotamos por $Fn_{<\kappa}(\lambda, \mu)$ o *forcing* das funções parciais de λ em μ de cardinalidade menor que κ, munido da ordem de extensão (inversa) de funções, ou seja:

$$Fn_{<\kappa}(\lambda, \mu) = \{f : \mathrm{dom} f \to \mu : \ \mathrm{dom} f \subseteq \lambda \text{ and } |\mathrm{dom} f| < \kappa\}$$

e dadas $f, g \in Fn_{<\kappa}(\lambda, \mu)$, $f \leq g$ se $\mathrm{dom} g \subseteq \mathrm{dom} f$ e para todo $x \in \mathrm{dom} g$, $f(x) = g(x)$.

Topologia

Todos os espaços topológicos que consideramos neste trabalho são espaços de Hausdorff e usualmente denotamos por K um espaço compacto. Lembramos que um espaço topológico X é dito zero-dimensional se sua topologia possui uma base formada por abertos-fechados e X é disperso se todo subespaço não vazio possui pontos isolados. Um espaço topológico X é metrizável se admite uma métrica que induz sua topologia. O peso de X é o menor cardinal infinito κ tal que X possui uma base para sua topologia de cardinalidade κ e sabe-se que para um espaço compacto K, ele é metrizável se, e somente se, seu peso é ω. A densidade de X é o menor cardinal infinito κ tal que X possui um subconjunto denso de cardinalidade κ. Se a densidade do espaço X é ω, o espaço é dito separável.

O conjunto de Cantor[1] éo conjunto 2^ω, munido da (única) topologia que tem a família $\{\langle s \rangle : s \in 2^{<\omega}\}$ como base topologica, onde $\langle s \rangle = \{x \in 2^\omega : s \sqsubset x\}$ para cada $s \in 2^{<\omega}$ e onde $s \sqsubset x$ significa que x é uma sequência que extende s.

Dualidade de Stone

Uma álgebra de Boole é um conjunto B munido de duas operações binárias $\vee$ e $\wedge$, uma operação unária $\neg$, e dois elementos distinguidos 0 e 1, que satisfazem os seguintes axiomas para quaisquer $a, b, c \in B$:

$$\begin{array}{cc}
a \vee b = b \vee a & a \wedge b = b \wedge a \\
a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c & a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c \\
a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) & a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\
a \vee 0 = a & a \wedge 1 = a \\
a \vee \neg a = 1 & a \wedge \neg a = 0.
\end{array}$$

[1]Este espaço topológico é, de fato, homeomorfo ao conjunto de Cantor construído da maneira usual.

O exemplo mais simples de uma álgebra de Boole é o conjunto $\wp(X)$ das partes de um conjunto X, munido das operações de união $\cup$, intersecção $\cap$, complemento $X \setminus \cdot$, o conjunto vazio $\emptyset$ e o próprio conjunto X. Além da álgebra de Boole $\wp(\mathbb{N})$, será também bastante utilizada aqui a álgebra quociente $\wp(\mathbb{N})/Fin$, que é dada pelas classes de equivalência de subconjuntos de $\mathbb{N}$ com respeito à relação de equivalência dada por $a \sim b$ se, e somente se, $(a \setminus b) \cup (b \setminus a)$ é finito. Neste caso, as operações são dadas pelas classes de equivalência das operações correspondentes ao caso de $\wp(X)$: por exemplo, $[a] \vee [b] = [a \cup b]$. Além disso, $[a] \leq [b]$ se, e somente se, $a \subseteq^* b$, ou seja, $a \setminus b$ é finito.

Dada uma álgebra de Boole B, o espaço de Stone de B é o espaço topológico formado pelo conjunto K_B de todos os ultrafiltros[2] em B, munido da (única) topologia que tem a família $\{[b] : b \in B\}$ como base topológica, onde $[b] = \{u \in K_B : b \in u\}$. Resultados clássicos devido a Stone garantem que K_B é um espaço compacto e zero-dimensional (pois cada conjunto $[b]$ é um aberto-fechado) e que o conjunto $Clopen(K_B)$ dos subconjuntos de K_B que são abertos-fechados, munido das operações de união, intersecção, complemento, $\emptyset$ e K_B, forma uma álgebra de Boole isomorfa à álgebra de Boole B. Lembramos que um isomorfismo de álgebras de Boole é uma função bijetora que respeita as operações e elementos distinguidos das álgebras. Respectivamente, se K é um espaço compacto e zero-dimensional, então o espaço de Stone da álgebra de Boole $Clopen(K)$ é homeomorfo ao espaço K. Em particular, o peso do espaço de Stone K_B de uma álgebra de Boole B é igual à cardinalidade $|B|$ da álgebra.

Mais ainda, a dualidade de Stone garante, dados $h : A \to B$ um homomorfismo de álgebras de Boole e $f : K_B \to K_A$ dada por $f(u) = h^{-1}[u]$, então f é contínua e temos que se h é sobrejetor, então f é injetora e se h é injetor, então f é sobrejetora. Por outro lado, seja $f : L \to K$ uma função contínua e seja $h : Clopen(K) \to Clopen(L)$ dado por $h(a) = f^{-1}[a]$. Então h é um homomorfismo e temos que se f é sobrejetora, então h é injetor e se f é injetora, então h é sobrejetor.

Os exemplos que mais nos interessam neste trabalho são o da álgebra $\wp(\mathbb{N})$, cujo espaço de Stone é o compactificado de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, $\beta\mathbb{N}$, e $\wp(\mathbb{N})/Fin$, cujo espaço de Stone é o resíduo (*remainder*) $\omega^* = \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.

[2] Um ultrafiltro em um conjunto X é um filtro em X, maximal com relação à ordem da inclusão.

Espaços de Banach

Consideramos apenas espaços de Banach reais e, de maneira geral, de dimensão infinita. Lembramos que um isomorfismo entre dois espaços de Banach é um operador linear limitado bijetor e uma isometria entre dois espaços de Banach é um operador linear limitado bijetor que preserva a norma dos vetores.

Dado um espaço de Banach X, denotamos por X^* o seu dual topológico, ou seja, o espaço formado pelos funcionais lineares e contínuos em X. Lembramos que um espaço é reflexivo se o operador canônico J que associa a cada $x \in X$ o elemento $x^{**} \in X^{**}$ dado por $x^{**}(x^*) = x^*(x)$ é sobrejetor.

Além da topologia induzida pela norma em X, o espaço X^* induz outra topologia em X, chamada de topologia fraca. Já no espaço dual, além das topologias fraca e induzida pela norma, considera-se ainda uma topologia induzida pelo predual X, chamada topologia fraca*. Assim, ao longo do trabalho usamos as noções topológicas correspondentes a cada uma dessas topologias. Por exemplo, um subconjunto B de X é fracamente compacto se é compacto com respeito à topologia fraca.

Espaços de Banach da forma $C(K)$

Neste trabalho, de particular importância são os espaços de Banach da forma $C(K)$: dado um espaço compacto K, denotamos por $C(K)$ o espaço de Banach formado pelas funções contínuas definidas em K a valores reais, munido da norma do supremo. O clássico Teorema de Stone-Weierstrass garante que a densidade do espaço de Banach $C(K)$ é igual ao peso do espaço compacto K. O Teorema de Riesz, que garante que o dual de $C(K)$ é isométrico ao espaço das medidas de Radon sobre K, será fundamental ao longo do trabalho.

Desta forma, dado um espaço compacto K, consideramos a medida de Dirac δ_x, que a cada função $f \in C(K)$ associa o valor $f(x)$, como um funcional linear contínuo de $C(K)$, ou seja, um elemento de seu dual $C(K)^*$.

No caso em que o espaço K é o espaço de Stone de uma álgebra de Boole B, dado um aberto-fechado $U \subseteq K$, temos que a função característica χ_U de U é contínua, ou seja, é um vetor do espaço $C(K)$. Além disso, cada medida de Radon em K está univocamente determinada por uma medida finitamente aditiva em B, e vice-versa.

Recordamos que o espaço ℓ_∞ é isométrico ao espaço $C(\beta\mathbb{N})$ e o espaço quociente ℓ_∞/c_0 é isométrico ao espaço $C(\omega^*)$.

Espaços clássicos e suas versões não separáveis

Além do espaços de sequência clássicos c_0, ℓ_∞ e ℓ_1, também consideramos as generalizações destes espaços para densidades maiores: dado um conjunto Γ, $c_0 0(\Gamma)$ é o espaço vertorial formado pelas família $(x_\alpha)_{\alpha \in Gamma}$ de números reais que são não nulas apenas para um número finito de α'. Além disso,

$$c_0(\Gamma) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathbb{R} : (\forall\varepsilon > 0) \quad |\{\alpha \in \Gamma : |x_\alpha| \geq \varepsilon\}| < \omega\},$$

$$\ell_\infty(\Gamma) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathbb{R} : \sup_{\alpha\in\Gamma} |x_\alpha| < \infty\},$$

ambos munidos da norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$, e

$$\ell_1(\Gamma) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma} \subseteq \mathbb{R} : \sum_{\alpha\in\Gamma} |x_\alpha| < \infty\},$$

munido da norma $\|(x_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}\|_1 = \sum_{\alpha\in\Gamma} |x_\alpha|$. Finalmente, se X é um espaço de Banach, definimos o espaço de Banach

$$\ell_\infty(X) = \{(x_n)_{n\in\omega} \subseteq X : \sup_{n\in\omega} \|x_n\| < \infty\},$$

munido da norma $\|(x_n)_{n\in\omega}\|_\infty = \sup_{n\in\omega} \|x_n\|$.

Capítulo 1

Sistemas biortogonais

Neste capítulo apresentamos resultados relacionados à existência de sistemas biortogonais em espaços de Banach não separáveis e outras estruturas relacionadas. Esta linha de pesquisa é uma continuação natural da pesquisa que desenvolvemos durante o doutorado. Os resultados apresentados aqui são fruto de nossa pesquisa em colaboração com P. Koszmider, O. Selim e S. Todorcevic e constam dos trabalhos [12, 19].

Definição 1.1 (Sistema biortogonal)**.** *Dado um conjunto de índices I, um sistema biortogonal em um espaço de Banach X é uma família de pares $(x_i, x_i^*)_{i\in I}$ de vetores x_i e funcionais lineares contínuos x_i^* tal que $x_i^*(x_j) = 1$ se, e somente se, $i = j$ e que se anula caso contrário.*

Exemplos clássicos de sistemas biortogonais são os elementos de uma base ortonormal de um espaço de Hilbert ou de uma base de Schauder de um espaço de Banach separável, juntamente com seus funcionais biortogonais. O livro [34] compila resultados sobre a existência ou não desta estrutura tanto no contexto separável, como não separável, além de analisar o impacto destes resultados sobre a geometria dos espaços de Banach em questão. Um resultado clássico de Markushevich afirma que todo espaço de Banach separável X admite um sistema biortogonal infinito tal que os vetores geram um subespaço vetorial denso de X e os funcionais geram um subespaço vetorial denso na topologia fraca* de X^* ([34, Teorema 1.22]), conhecido como base de Markushevich.

No contexto não separável, a situação é muito mais complexa. Há na literatura diversas demonstrações de que é consistente que existem espaços de Banach não separáveis sem sistemas biortogonais não enumeráveis, sendo a mais famosa delas uma consequência de uma construção feita por Kunen (veja [44]), sob a hipótese do contínuo (CH), de um espaço compacto K não metrizável tal que todas as suas potências finitas K^n são hereditariamente separáveis. Isso implica que o correspondente espaço $C(K)$ não possui sistemas biortogonais não enumeráveis. Assim como neste caso, na maioria das construções conhecidas trata-se de um espaço de Banach não separável da forma $C(K)$, como é o caso das construções de [46], feita com o uso do princípio combinatório $\diamondsuit$, e [54], feita sob a hipótese $\mathfrak{b} = \omega_1$ (voltaremos a essa construção adiante).

Por outro lado, num resultado surpreendente de [56], Todorcevic mostrou que o Máximo de Martin (MM) - uma generalização do axioma do *forcing* próprio (PFA), que por sua vez generaliza o axioma de Martin (MA) - implica que todo espaço de Banach não separável possui um sistema biortogonal não enumerável. A relação entre os invariantes topológicos de um compacto K e os sistemas biortogonais em $C(K)$ é estudade por Koszmider em [38].

1.1 Sistemas biortogonais cujas medidas têm suportes finitos

Nesta seção apresentamos os resultados publicados em [12] conjuntamente com P. Koszmider. Neste trabalho, estudamos quão simples devem ser os suportes dos funcionais envolvidos em sistemas biortogonais não enumeráveis. Como já dito, há diversas construções consistentes de espaços de Banach não separáveis sem sistemas biortogonais não enumeráveis, que usam distintas ferramentas, desde princípios combinatórios como é o caso de [44, 46, 54], quanto a construção de distintos modelos, por *forcing*, em que prova-se a existência de um tal espaço, como é o caso do nosso trabalho de doutorado [11], publicado em [13], e seus precursores [36, 48]. A grande maioria destas construções, além de ser da forma $C(K)$, é feita da seguinte forma: constrói-se uma família de funções $(f_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ em $C(K)$ e uma família de pares de pontos $(x_\alpha, y_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ em K tais que

$$\forall \alpha < \omega_1 \ f_\alpha(x_\alpha) = 1 \text{ and } \forall \alpha \neq \beta \ f_\alpha(x_\beta) = f_\alpha(y_\beta).$$

Daí, tomando $\mu_\alpha = \delta_{x_\alpha}$, segue que $(f_\alpha, \mu_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ é um sistema biortogonal. Este tipo de sistema biortogonal foi estudado em [27].

No já mencionado trabalho [56], Todorcevic mostra que todo espaço de Banach da forma $C(K)$ de densidade estritamente maior que ω_1 possui um sistema semibiortogonal não enumerável, isto é, uma família de pares $(x_\alpha, x^*_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ tal que $x^*_\beta(x_\alpha) \geq 0$ para todos $\alpha, \beta < \omega_1$, $x^*_\alpha(x_\alpha) = 1$ e $x^*_\beta(x_\alpha) = 0$ se $\alpha < \beta$. Além disso, mostrou que, sob o máximo de Martin (MM), sempre que um espaço de Banach da forma $C(K)$ possui um sistema biortogonal não enumerável, ele também possui um sistema biortogonal não enumerável da forma descrita acima. Motivados por este resultado, investigamos se isso seria verdade sem hipóteses adicionais e no trabalho [12] mostramos que não:

Teorema 1.2 (Teorema 1.2 de [12]). *Para cada $n > 1$, é consistente que existe um espaço compacto K_{2n} tal que $C(K_{2n})$ não possui sistemas biortogonais (semi)biortogonais cujos funcionais sejam medidas com suporte de tamanho estritamente menor que $2n$, mas possui sistemas biortogonais não enumeráveis cujos funcionais são medidas com suporte de tamanho $2n$.*

A demonstração deste resultado é feita por *forcing*, de forma a adicionar um espaço compacto que pode ser visto como uma generalização do espaço A conhecido como *split interval* ou *double arrow space* introduzido por Alexandrov, em que cada ponto x do intervalo aberto $(0, 1)$ é bifurcado em dois pontos x_0 e x_1, de forma que intervalos das formas $[0, x_0]$ e $[x_1, 1]$ sejam abertos-fechados e, portanto, $(\chi_{[0,x_0]}, \delta_{x_0} - \delta_{x_1})_{x\in(0,1)}$ é um sistema biortogonal em $C(A)$.

Na nossa construção, em vez de bifurcar cada ponto do intervalo em apenas dois, a ideia é bifurcar cada ponto de um conjunto não enumerável do conjunto de Cantor em $2n$ pontos: dado $N \in \mathbb{N}$, seja $[N] = \{1, \ldots, N\}$.

Definição 1.3 (Família N-bifurcante). *Fixada uma família $\mathcal{X} = \{x_\xi : \xi < \omega_1\} \subseteq 2^\omega$ de elementos distintos e $N \in \mathbb{N}$, seja*

$$K_N = (2^\omega \setminus \mathcal{X}) \cup (\mathcal{X} \times [N])$$

e defina

$$V_s = (\langle s\rangle \cap (2^\omega \setminus \mathcal{X})) \cup ((\langle s\rangle \cap \mathcal{X}) \times [N]),$$

onde $\langle s\rangle = \{x \in 2^\omega : s \sqsubset x\}$.

Dizemos que uma família $(A_{\xi,i} : \xi < \omega_1, i \in [N])$ de subconjuntos de K_N é uma família N-bifurcante se satisfaz as seguintes condições:

1. *$(x_\xi, i) \in A_{\xi,i} \subseteq K_N$ para cada $\xi < \omega_1$ e $i \in [N]$;*
2. *para cada $\xi < \omega_1$ os conjuntos $A_{\xi,i}$ são dois a dois disjuntos;*
3. *para cada $\xi < \omega_1$ temos que $K_N = A_{\xi,1} \cup ... \cup A_{\xi,N}$;*
4. *se $\eta < \xi$, então existem $k \in \mathbb{N}$ e $j \in [N]$ tais que $A_{\eta,i} \cap V_{x_\eta|k} \subseteq A_{\xi,j} \cap V_{x_\eta|k}$;*
5. *se $\eta > \xi$ e $x = x_\eta$ ou $x \in 2^\omega \setminus \mathcal{X}$, então existem $k \in \mathbb{N}$ e $j \in [N]$ tais que $V_{x|k} \subseteq A_{\xi,j}$.*

Dada uma famíia N-bifurcante $(A_{\xi,i} : \xi < \omega_1, i \in [N])$, dizemos que o espaço $(K_N, \mathcal{T})$ é um conjunto de Cantor N-bifurcado se a topologia $\mathcal{T}$ em K_N é definida indicando as bases locais $\mathcal{B}_x$ em x para todo $x \in K_N$ da seguinte forma: se $x \in 2^\omega \setminus \mathcal{X}$, então

$$\mathcal{B}_x = \{V_s : s \subseteq x\}$$

e se $x = (x_\xi, i) \in K_N$, então

$$\mathcal{B}_x = \{V_s \cap A_{\xi,i} : s \subseteq x_\xi\}.$$

Com esta definição, provamos primeiramente o seguinte:

Proposição 1.4. *Dado $N \in \mathbb{N}$, se $(A_{\xi,i} : \xi < \omega_1, i \in [N])$ é uma família N-bifurcante, então o conjunto de Cantor N-bifurcado K_N correspondente é um espaço compacto e zero-dimensional.*

Em seguida, introduzimos a seguinte definição:

Definição 1.5 (Família balanceada)**.** *Dizemos que uma família $2n$-bifurcante $(A_{\xi,i} : \xi < \omega_1, i \in [2n])$ é balanceada se satisfaz ainda:*

6. para quaisquer $\xi, \eta \in \omega_1$ distintos e todo $j \in [2n]$,

$$\{i \in \{1, 3, \dots, 2n-1\} : (x_\eta, i) \in A_{\xi,j}\}| = |\{i \in \{2, 4, \dots, 2n\} : (x_\eta, i) \in A_{\xi,j}\}|.$$

Temos assim garantida a existência de um sistema biortogonal não enumerável cujas medidas têm suporte de tamanho $2N$:

Lema 1.6. *Suponha que $n \in \mathbb{N}$ e K_{2n} é um conjunto de Cantor $2n$-bifurcado, onde a família $2n$-bifurcante $(A_{\xi,i} : \xi < \omega_1, i \in [2n])$ é balanceada. Então temos que $C(K_{2n})$ possui um sistema biortogonal não enumerável cujas medidas têm suporte de tamanho $2n$.*

Elementos da demonstração. Para cada $\xi < \omega_1$, seja $f_\xi = \chi_{A_{\xi,2n}}$ e

$$\mu_\xi = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{(x_\xi,2i)} - \delta_{(x_\xi,2i-1)})$$

e provamos que $(f_\xi, \mu_\xi)_{\xi<\omega_1}$ é um sistema biortogonal em $C(K_{2n})$. □

Resta então construir por *forcing* uma família $2n$-bifurcante balanceada e usar a genericidade da família para provar a não existência de sistemas biortogonais não enumeráveis em $C(K_{2n})$ cujos funcionais tenham suporte de tamanho menor que $2n$. A ordem parcial usada para adicionar uma tal família é formada por aproximações finitas para a mesma:

Definição 1.7. *Seja* $\mathbb{P}$ *o* forcing *formado pelas condições*

$$p = (F_p, n_p, (f^p_\xi : \xi \in F_p)),$$

onde:

1. $F_p \in [\omega_1]^{<\omega}$;
2. $n_p \in \omega$ *é tal que para todos* $\xi \neq \eta$ *em* F_p, $x_\xi|n_p \neq x_\eta|n_p$;
3. *para todo* $\xi \in F_p$,

$$f^p_\xi : 2^{n_p} \setminus \{x_\xi|n_p\} \to [2n]^{[2n]} \times [F_p \cap (\xi + 1)]$$

é tal que

a) *se* $f^p_\xi(s) = (\varphi, \xi)$, *então* φ *é uma função constante;*

b) *se* $f^p_\xi(s) = (\varphi, \eta)$ *para algum* $\eta < \xi$, *então*

$$\forall j \in [2n] \quad |\varphi^{-1}(j) \cap \{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}| = |\varphi^{-1}(j) \cap \{2, 4, \dots, 2n\}|.$$

Definimos $q \leq p$ *se* $F_q \supseteq F_p$, $n_q \geq n_p$ *e para todo* $\xi \in F_p$, *todo* $s \in 2^{n_q} \setminus \{x_\xi|n_q\}$ *e todo* $t \in 2^{n_p} \setminus \{x_\xi|n_p\}$,

$$t \subseteq s \Rightarrow f^p_\xi(t) = f^q_\xi(s).$$

Provamos então que obtemos a desejada família $2n$-bifurcante genérica e o espaço $2n$-bifurcado resultante possui as propriedades desejadas:

Teorema 1.8. *Em* $V^{\mathbb{P}}$ *existe uma família* $2n$*-bifurcante balanceada tal que o espaço* $C(K_{2n})$ *correspondente não possui sistemas (semi)biortogonais não enumeráveis cujas medidas tenham suporte de tamanho estritamente menor que* $2n$.

Elementos da demonstração. Primeiramente, provamos que a família $(A_{\xi,j} : \xi \in \omega_1, j \in [2n])$, onde para cada $\xi \in \omega_1$ e cada $j \in [2n]$,

$$\begin{aligned} A_{\xi,j} &= \bigcup\{V_s \cap A_{\eta,i} : \exists p \in G, f^p_\xi(s) = (\varphi, \eta), \text{ para algum } \eta \neq \xi \text{ e } \varphi(i) = j\} \\ &\cup \bigcup\{V_s : \exists p \in G, f^p_\xi(s) = (\varphi, \xi) \text{ e } \varphi \text{ é a função constante igual a } j\} \\ &\cup \{(x_\xi, j)\}, \end{aligned}$$

é uma família $2n$-bifurcante balanceada.

Em seguida, uma série de lemas combinatórios relacionados a $\mathbb{P}$ e outros de aproximação de elementos de $C(K_{2n})$ e seu dual $C(K_{2n})^*$ são necessários para provar que $C(K_{2n})$ não possui biortogonais não enumeráveis cujas medidas tenham suporte de tamanho estritamente menor que $2n$. A chave da demonstração é o lema a seguir □

Lema 1.9. *Dada uma coleção de conjuntos dois a dois disjuntos* $E_\alpha = \{\xi_\alpha^1, ..., \xi_\alpha^k\} \subseteq \omega_1$ *para* $\alpha < \omega_1$, *dado* $\epsilon : [k] \times [2n] \to [2n]$ *tal que*

$$|\{l \in \{1, 3, 5, ..., 2n-1\} : \epsilon(i, l) = j\}| = |\{l \in \{2, 4, 6, ..., 2n\} : \epsilon(i, l) = j\}|$$

e dado $\delta : [k] \to [n]$, *existem* $\alpha < \beta$ *tais que para todo* $1 \leq i \leq k$,

$$\forall 1 \leq l' \leq 2n \ (x_{\xi_\beta^i}, l') \in A_{\xi_\alpha^i, \delta(i)} \quad e \quad (x_{\xi_\alpha^i}, l) \in A_{\xi_\beta^i, \epsilon(i,l)}.$$

Elementos da demonstração. Escolhemos condições $(p_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ em $\mathbb{P}$ de forma que cada p_α decide o conjunto E_α. Usamos argumentos usuais de contagem para refinar esta família a uma família de condições mais similares e daí, encontramos amalgamações convenientes de pares destas condições que forçam as duas conclusões desejadas. □

Uma questão interessante que permanece em aberto é se quando o quadrado K^2 de um espaço compacto K contém um subsespaço discreto de tamanho κ, então $C(K)$ admite um sistema biortogonal de tamanho κ.

Em outra direção, numa colaboração com O. Selim em andamento, investigamos a possibilidade de modificar os resultados de [12] e provar a consistência da existência de um espaço compacto e disperso K tal que $C(K)$ admite sistemas biortogonais não enumeráveis, mas seus funcionais devem necessariamente conter medidas com suporte infinito, ou seja $C(K)$ não admite sistemas biortogonais não enumeráveis cujas medidas tenham suporte finito.

1.2 Sistemas biortogonais sob a dicotomia do P-ideal

Num trabalho conjunto com S. Todorcevic [13] ainda em elaboração, nos interesssamos pela questão da existência de espaços de Banach não separáveis sem sistemas biortogonais não enumeráveis sob o princípio conhecido como dicotomia do P-ideal:

Definição 1.10 (Dicotomia do P-ideal - PID). *Um P-ideal* $\mathcal{I}$ *de um conjunto (em geral, não enumerável)* S *é um ideal de subconjuntos infinitos e enumeráveis de* S *tal que para toda cadeia crescente* $(X_n)_{n\in\omega}$ *de elementos de* $\mathcal{I}$, *existe* $X \in \mathcal{I}$ *tal que* $X_n \subseteq^* X$, *ou seja,* $X_n \setminus X$ *é finito para todo* $n \in \omega$.

A dicotomia do P-ideal é um princípio combinatório que afirma que para todo P-ideal $\mathcal{I}$ *de conjuntos infinitos e enumeráveis de um conjunto* S*:*

(a) ou existe um conjunto não enumerável $X \subseteq S$ *tal que* $[X]^\omega \subseteq \mathcal{I}$*;*

(b) ou $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ *onde* $[S_n]^\omega \cap \mathcal{I} = \emptyset$*.*

Ao lado do axioma de Martin (MA) e do axioma da coloração aberta (OCA), a dicotomia do P-ideal (PID) é uma consequência do chamado máximo de Martin (MM) e foi introduzida por Todorcevic em [58]. Sendo consistente[1] também com a hipótese generalizada do contínuo (GCH), é natural investigar quais consequências de PFA podem ser provadas assumindo PID.

A PID se revela potente quando combinada a alguma desigualdade cardinal, como em [49], por exemplo. No nosso caso, esta desigualdade é $\mathfrak{b} > \omega_1$:

Definição 1.11 (Cardinal $\mathfrak{b}$)**.** $\mathfrak{b}$ *é o menor cardinal* κ *tal que existe uma família ilimitada em* $(\omega^\omega, \leq^*)$ *de cardinalidade* κ*, ou seja, uma família* $(f_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *de funções* $f_\alpha : \omega \to \omega$ *de forma que não existe* $f : \omega \to \omega$ *tal que para todo* $\alpha < \kappa$*,* $f_\alpha(n) > f(n)$ *apenas para uma quantidade finita de* n*'s.*

Como já mencionado na introdução deste capítulo, uma das consequências de MM é que não existem espaços de Banach não separáveis sem sistemas biortogonais não enumeráveis. Por outro lado, Todorcevic mostrou em [54] (veja também [55]) que, assumindo a igualdade cardinal $\mathfrak{b} = \omega_1$, existe um espaço compacto e disperso K de peso ω_1 tal que as potências finitas K^n são hereditariamente separáveis. Consequentemente, o espaço de Banach não separável $C(K)$ é um espaço de Asplund que é hereditariamente Lindelöf com relação à topologia fraca e, portanto, não admite sistemas biortogonais não enumeráveis. Mais ainda, não admite sistemas semibiortogonais ou sistemas ε-biortogonais para nenhum $0 \leq \varepsilon < 1$:

Definição 1.12 (Sistema ε-biortogonal)**.** *Dado* $\varepsilon \geq 0$*, um sistema* ε*-biortogonal é uma família de pares* $(x_i, x_i^*)_{i\in I}$ *tal que* $x_i^*(x_j) = 1$ *se, e somente se,* $i = j$ *e* $|x_i^*(x_j)| \leq \varepsilon$ *caso contrário.*

Desta forma, a não existência de um espaço de Banach não separável sem sistemas biortogonais não enumeráveis seguramente não pode ser provada assumindo apenas PID, mas a pergunta que nos motivou é: o que ocorre sob PID e $\mathfrak{b} > \omega_1$? O lema a seguir nos fornece o típico ideal para o qual podemos usar a PID quando assumimos $\mathfrak{b} > \omega_1$:

[1] Relativamente à consistência da existência de um cardinal supercompacto.

Lema 1.13. *Se uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de um conjunto S é tal que $|\mathcal{F}| < \mathfrak{b}$, então*

$$\mathcal{I} = \{A \in [S]^\omega : (\forall F \in \mathcal{F}) \quad |F \cap A| < \omega\}$$

é um P-ideal, que denotamos por $\mathcal{F}^\perp$.

O resultado principal do nosso trabalho é o seguinte:

Teorema 1.14 (Teorema 5 de [19]). *Assuma PID e $\mathfrak{b} > \omega_1$. Se a bola dual unitária de um espaço de Banach X de densidade ω_1 é fraca* sequencialmente compacta, então para todo $\varepsilon > 0$, X contém um sistema ε-biortogonal.*

Elementos da demonstração. A demonstração é essencialmente feita em três passos. Primeiramente, sob as hipóteses do teorema, obtemos uma família normalizada $(f_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ de funcionais lineares contínuos no espaço de Banach X de forma que para todo $x \in X$, $(f_\alpha(x))_{\alpha\in\omega_1} \in c_0(\omega_1)$. Para isso, consideramos um conjunto conveniente S de funcionais, um denso conveniente D de X e o ideal

$$\mathcal{I}_0 = \{A \in [S]^\omega : (\forall x \in D)(\forall \varepsilon \in (0,1) \cap \mathbb{Q}) \quad \{f \in A : |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ é finito.}\}$$

Usamos um argumento do tipo Teorema de Fubini para garantir a segunda alternativa da PID. Daí, a partir desta família, extraímos então uma subfamília não enumerável $(f_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ de forma que para todo x em D, $(f_\alpha(x))_{\alpha\in\Gamma}\rangle \in \ell_1(\Gamma)$. Para isso, usamos o ideal

$$\mathcal{I}_1 = \{A \in [\Gamma]^\omega : (\forall x \in D) \quad \sum_{\alpha\in A} |f_\alpha(x)| < +\infty\}.$$

Finalmente, para cada $0 < \varepsilon < 1$, construímos recursivamente um sistema ε-biortogonal não enumerável em X cujos funcionais extraímos desta família. □

Combinando este resultado com o resultado já mencionado de Todorcevic [54], e lembrando que um espaço de Banach é de Asplund se o dual de todo subespaço separável é separável, segue imediatamente o seguinte:

Corolário 1.15. *Assuma PID. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathfrak{b} = \omega_1$.

(ii) Existe um espaço de Asplund não separável sem sistemas ε-biortogonais não enumeráveis para nenhum $\varepsilon > 0$.

Demonstração. A implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) segue da construção de [54], sob $\mathfrak{b} = \omega_1$ (que não usa PID), já que o espaço compacto não metrizável K construído é disperso, de forma $C(K)$ é um espaço de Asplund. A outra implicação segue do teorema anterior, sabendo que a bola dual unitária de um espaço de Asplund é fraca* sequencialmente compacta. $\square$

Aqui temos ainda muitas questões a serem exploradas. Por exemplo, quais das seguintes afirmações são equivalentes às afirmações (i) e (ii) acima sob a PID?

(iii) $\mathfrak{p} = \omega_1$.

(iv) Existe um espaço de Asplund não separável sem sistemas biortogonais não enumeráveis.

(v) Existe um espaço de Asplund não separável que possui sistemas ε-biortogonais para certos $\varepsilon > 0$, mas não para todo $0 < \varepsilon < 1$.

(vi) Existe um espaço de Asplund de densidade ω_1 sem renormação com a propriedade de intersecção de Mazur.

Sabe-se que (i) implica (iii) e (iv). Para mostrar que (i) implica (v) será necessária uma nova construção usando $\mathfrak{b} = \omega_1$, mais sofisticada que a de [54]. Por outro lado, na tentativa de mostrar alguma das recíprocas destas implicações, será necessário encontrar P-ideais que sirvam a nossos propósitos. Por exemplo, para provar (vi) a partir de (i), é necessário analisar os argumentos Bačák e Hájek [5], em que os autores usam os resultados de [56] para mostrar que não vale (vi) sob MM, e adaptá-los para este contexto.

Uma motivação para as perguntas acima vem do fato que, em geral, uma desigualdade do tipo $\kappa > \omega_1$, para algum invariante cardinal κ, determina o comportamento de certos objetos sob a PID, como é o caso do invariante introduzido em [49], que determina os cinco tipos cofinais de conjuntos dirigidos de tamanho ω_1. Entretanto, os casos mais interessantes são quando o invariante cardinal é um dos cardinais já conhecidos, como os cardinais $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{p}$, lembrando que o cardinal $\mathfrak{p}$ é o menor cardinal κ tal que existe uma família $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{P}$ que possui a propriedade da intersecção finita e não possui pseudo-intersecção, ou seja, $X_{\alpha_1} \cap \ldots X_{\alpha_k}$ é sempre infinito, mas não existe X infinito tal que $X \subseteq^* X_\alpha$ para todo $\alpha < \kappa$.

Capítulo 2

Espaços universais

Apresentamos neste capítulo resultados relacionados à existência de espaços de Banach universais de densidade $\mathfrak{c}$. Em sua maioria, são resultados de consistência de afirmações cuja negação segue da hipótese do contínuo e estão relacionados à existência de objetos universais para classes de álgebras de Boole e de espaços compactos. Esses resultados são fruto da colaboração com P. Koszmider e foram publicados nos trabalhos [14, 15, 16, 17].

Resultados clássicos devidos a Alexandroff [2] e a Banach-Mazur (Teorema 8.7.2 de [51]) garantem, respectivamente, que todo espaço compacto metrizável é imagem contínua do conjunto de Cantor 2^ω e que todo espaço de Banach separável é isométrico a um subespaço do espaço de Banach $C([0,1])$. Tais resultados motivam as seguintes definições:

Definição 2.1 (Objetos universais)**.** *Dada uma classe de álgebras de Boole $\mathcal{B}$, dizemos que uma álgebra de Boole $B \in \mathcal{B}$ é universal para $\mathcal{B}$ se todo elemento $A \in \mathcal{B}$ é isomorfo a uma subálgebra de B.*

Dada uma classe de espaços compactos $\mathcal{K}$, dizemos que um espaço compacto $K \in \mathcal{K}$ é universal para $\mathcal{K}$ se todo elemento $L \in \mathcal{K}$ é uma imagem contínua de K.

Dada uma classe de espaços de Banach $\mathcal{X}$, dizemos que um espaço de Banach $X \in \mathcal{X}$ é:

- *universal para $\mathcal{X}$ se todo elemento $Y \in \mathcal{X}$ é isomorfo a um subespaço (fechado) de X.*

- *isometricamente universal para $\mathcal{X}$ se todo elemento $Y \in \mathcal{X}$ é isométrico a um subespaço de X.*

Com esta nomenclatura, os resultados de Alexandreoff e de Banach-Mazur citados dizem que o conjunto de Cantor 2^ω e o espaço de Banach

$C([0,1])$ são espaços universais para a classe dos espaços compactos metrizáveis e para a classe dos espaços de Banach separáveis, respectivamente.

Passando ao contexto de álgebras de Boole não enumeráveis e dos espaços compactos não metrizáveis, temos a seguinte consequência da dualidade de Stone:

Teorema 2.2. *Seja κ um cardinal infinito. Se B é uma álgebra de Boole universal para a classe das álgebras de Boole de cardinalidade menor ou igual a κ, então o espaço de Stone de B, K_B, é um espaço universal para a classe dos espaços compactos de peso menor ou igual a κ. Reciprocamente, se K é um espaço compacto zero-dimensional e universal para a classe dos espaços compactos de peso menor ou igual a κ, então a álgebra dos abertos-fechados de K, $Clopen(K)$, é uma álgebra de Boole universal para as álgebras de Boole de cardinalidade menor ou igual a κ.*

Assim, um corolário do resultado de Alexandroff é que a álgebra livre com ω geradores, que é isomorfa a $Clopen(2^\omega)$, é universal para a classe das álgebras de Boole enumeráveis.

O seguinte resultado pode ser visto como uma versão do resultado acima, agora tratando de uma dualidade imperfeita entre a categoria dos espaços compactos e a dos espaços de Banach (ou dos espaços de Banach $C(K)$).

Teorema 2.3. *Seja κ um cardinal infinito. Se K é um espaço universal para a classe dos espaços compactos de peso menor ou igual a κ, então $C(K)$ é isometricamente universal para a classe dos espaços de Banach de densidade menor ou igual a κ.*

Esse teorema decorre do Teorema de Banach-Alaoglu, que garante que a bola dual unitária de um espaço de Banach de densidade κ, munida da topologia fraca*, é um espaço compacto de peso κ, e da observação que qualquer espaço de Banach X é isométrico a um subespaço do espaço de funções contínuas $C(B_{X^*})$.

Segue ainda dos resultados já mencionados que o espaço de Banach $C(2^\omega)$ é também isometricamente universal para a classe dos espaços de Banach separáveis. Por outro lado, Szlenk [53] mostrou que não existem espaços de Banach universais para a classe dos espaços de Banach separáveis reflexivos, por exemplo.

Nosso principal interesse é analisar as diversas possibilidades de existência de objetos universais no contexto de álgebras de Boole não enumeráveis, espaços compactos não metrizáveis e espaços de Banach não separáveis. Nesse sentido, estudamos condições que garantem a existência de monomorfismos booleanos, funções contínuas sobrejetoras ou mergulhos isométricos ou isomorfos entre diversos elementos destas classes de objetos.

2.1 O caso do espaço ℓ_∞/c_0

Um resultado de Parovičenko [47] garante que, sob a hipótese do contínuo (CH), a álgebra quociente $\wp(\mathbb{N})/Fin$ é universal para as álgebras de Boole de cardinalidade contínuo. Para demonstrar este fato, constrói-se por indução transfinita, por meio de um argumento do tipo *back and forth*, um isomorfismo entre uma álgebra de Boole B de cardinalidade contínuo fixada, cujos elementos são enumerados, e uma subálgebra de $\wp(\mathbb{N})/Fin$. Em cada passo, tem-se um isomorfismo parcial entre uma subálgebra enumerável de B e uma subálgebra enumerável de $\wp(\mathbb{N})/Fin$.

Segue dos Teoremas 2.2, 2.3 e do resultado de Parovičenko que o espaço ω^*, por ser homeomorfo ao espaço de Stone de $\wp(\mathbb{N})/Fin$, é universal para a classe dos espaços compactos de peso contínuo e que o espaço de Banach ℓ_∞/c_0, que é isometricamente isomorfo ao espaço $C(\omega^*)$, é isometricamente universal para os espaços de Banach de densidade contínuo.

Por outro lado, esta situação se reverte completamente no modelo de Cohen: segue dos argumentos de Kunen [40] que, no modelo obtido adicionando-se ω_2 reais de Cohen a um modelo satisfazendo CH, a álgebra de Boole $\wp(\mathbb{N})/Fin$ não contém cadeias bem-ordenadas de comprimento $\mathfrak{c}$, de forma que não pode ser universal para as álgebras de cardinalidade $\mathfrak{c}$. Traduzindo para a linguagem topológica, temos que o intervalo de ordinais $[0,\mathfrak{c}]$, munido da topologia da ordem, não é uma imagem contínua do espaço ω^* naquele modelo. A demonstração usa a riqueza do grupo de automorfismos do *forcing* de Cohen induzidos por permutações no ordinal ω_2.

Utilizando a mesma ideia, mas escolhendo cuidadosamente as permutações de ω_2 que nos servem, de forma bastante mais controlada e complexa que na prova de Kunen, mostramos em [14] que ℓ_∞/c_0 não possui cópias isomorfas do espaço $C([0,\mathfrak{c}])$ naquele mesmo modelo:

Teorema 2.4 (Teorema 1.4 de [14]). *No modelo obtido adicionando-se ω_2 reais de Cohen a um modelo satisfazendo a hipótese do contínuo (e, portanto, onde $\mathfrak{c}=\omega_2$), o espaço ℓ_∞/c_0 não contém cópias isomorfas do espaço $C([0,\omega_2])$ e, portanto, não é universal neste modelo para a classe dos espaços de Banach de densidade contínuo.*

Elementos da demonstração. Seja $\mathbb{P}=(Fn_{<\omega}(\omega_2,,2),\supseteq)$ o *forcing* que adiciona ω_2 reais de Cohen. A chave da demonstração de Kunen é o fato que, para certos $\mathbb{P}$-nomes $(\dot{A}_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ para uma família subconjuntos de $\mathbb{N}$ e certas fórmulas φ, dados ordinais $\alpha_1,\dots,\alpha_n<\omega_2$ e uma permutação σ de $\{1,\dots,n\}$, $\varphi(\dot{A}_{\alpha_1},\dots,\dot{A}_{\alpha_n})$ é válida no modelo de Cohen se, e somente se, $\varphi(\dot{A}_{\alpha_{\sigma(1)}},\dots,\dot{A}_{\alpha_{\sigma(n)}})$ é válida no modelo de Cohen. Isso decorre do fato que a permutação σ induz naturalmente um automorfismo $\hat{\sigma}$ de $\mathbb{P}$, de forma que a informação que uma condição $p \in \mathbb{P}$ contém sobre o ordinal $\alpha_i < \omega_2$ é a mesma que a condição $\hat{\sigma}(p)$ contém sobre o ordinal $\alpha_{\sigma(i)}$, de forma que os densos que determinam a validade de $\varphi(\dot{A}_{\alpha_1}, \ldots, \dot{A}_{\alpha_n})$ são levados por $\hat{\sigma}$ em densos que determinam a validade de $\varphi(\dot{A}_{\alpha_{\sigma(1)}}, \ldots, \dot{A}_{\alpha_{\sigma(n)}})$. Em particular, $\dot{A}_{\alpha_1} \subseteq^* \cdots \subseteq^* \dot{A}_{\alpha_n}$ vale se, e somente se, $\dot{A}_{\alpha_{\sigma(1)}} \subseteq^* \cdots \subseteq^* \dot{A}_{\alpha_{\sigma(n)}}$, o que é falso se a família é uma cadeia não trivial e σ é qualquer permutação não trivial.

Nossa generalização do argumento de Kunen é forte o suficiente para garantir não apenas que ℓ_∞/c_0 não contém cópias *isométricas* do espaço $C([0, \omega_2])$, mas que ℓ_∞/c_0 não contém sequer cópias *isomorfas* do espaço $C([0, \omega_2])$. De fato, usamos o fato que as normas dos vetores

$$\sum_{i=1}^{n}(\chi_{[0,\alpha_{2i}]} - \chi_{[0,\alpha_{2i-1}]}) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{[\alpha_{2i-1},\alpha_{2i}]}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}(\chi_{[0,\alpha_{\sigma(2i)}]} - \chi_{[0,\alpha_{\sigma(2i-1)}]}) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{[\alpha_{\sigma(2i)},\alpha_{\sigma(2i-1)}]}$$

em $C([0, \omega_2])$ podem ser drasticamente distintas quando escolhemos permutações apropriadas: enquanto a primeira terá sempre norma 1 se $\alpha_1 < \cdots < \alpha_{2n}$, a segunda soma terá norma n se $\alpha_1 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_{2n-1} < \alpha_{2n} < \cdots < \alpha_4 < \alpha_2$. Por outro lado, mostra-se, generalizando o argumento de Kunen, que se $(\dot{f}_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ é uma família de nomes para a imagem de cada função característica $\chi_{[0,\alpha]}$ por um potencial isomorfimo T de $C([0, \omega_2])$ sobre um subespaço fechado de ℓ_∞/c_0, então as normas dos vetores

$$\sum_{i=1}^{n}(\dot{f}_{\alpha_{2i}} - \dot{f}_{\alpha_{2i-1}}) = T(\sum_{i=1}^{n} \chi_{[0,\alpha_{2i}]} - \chi_{[0,\alpha_{2i-1}]})$$

e

$$\sum_{i=1}^{n}(\dot{f}_{\alpha_{\sigma(2i)}} - \dot{f}_{\alpha_{\sigma(2i-1)}}) = T(\sum_{i=1}^{n} \chi_{[0,\alpha_{\sigma(2i)}]} - \chi_{[0,\alpha_{\sigma(2i-1)}]})$$

em ℓ_∞/c_0 devem ser similares, de forma que T não poderia ser um isomorfismo. O caso em que $\dot{f}_\alpha = \chi_{\dot{A}_\alpha}$, onde $(\dot{A}_\alpha)_{\alpha<\omega_2}$ é uma cadeia em $\wp(\mathbb{N})/Fin$, coincide com o do argumento anterior. $\square$

Ainda sobre a estrutura do espaço de Banach ℓ_∞/c_0, apesar de ser um dos espaços não separáveis mais clássicos da literatura, diversas questões relacionadas permanecem em aberto. Por exemplo, Drewnowski e Roberts [25] mostraram que sob a hipótese do contínuo (CH), o espaço de Banach ℓ_∞/c_0 é um espaço primário (ou seja, se ℓ_∞/c_0 é isomorfo a $A \oplus B$, então ou A ou B é isomorfo ao espaço inteiro). A demonstração de Drewnowski e Roberts usa um resultado topológico de [42] que garante que, sob CH, se $(U_n)_{n\in\omega}$ é uma família de abertos-fechados dois a dois disjuntos de ω^*, então o fecho de sua união é um retrato de ω^*. Como consequência deste fato, temos que, sob CH, a soma $\ell_\infty(\ell_\infty/c_0)$ é isomorfa ao espaço ℓ_∞/c_0 e é fácil notar que isso é equivalente ao fato que $\ell_\infty(\ell_\infty/c_0)$ é isomorfo a um subespaço complementado de ℓ_∞/c_0. Daí, o método de decomposição de Pelczynski garante que, neste caso, ℓ_∞/c_0 possui a propriedade de Schroeder-Bernstein, ou seja, todo espaço de Banach X complementado em ℓ_∞/c_0 que contém uma cópia complementada de ℓ_∞/c_0 deve ser necessariamente isomorfo a ℓ_∞/c_0. O mesmo método de decomposição de Pelczynski garante que se ℓ_∞/c_0 possui a propriedade de Schroeder-Bernstein, então ℓ_∞/c_0 é primário.

Não se sabe, porém, o que pode ocorrer sem CH: ℓ_∞/c_0 possui a propriedade de Schoeder-Bernstein? É primário? Na tentativa de mostrar que esses resultados dependem de CH, provamos o seguinte resultado de consistência:

Teorema 2.5 (Teorema 3.2 de [16]). *No modelo obtido adicionando-se ω_2 reais de Cohen a um modelo satisfazendo a hipótese do contínuo, o espaço ℓ_∞/c_0 não é da forma $\ell_\infty(X)$ para nenhum espaço de Banach X.*

Elementos da demonstração. A parte principal da demonstração é mostrar que, neste modelo, o espaço $\ell_\infty(\ell_\infty/c_0)$ não é isomorfo a um subespaço de ℓ_∞/c_0 e isso é feito mostrando que o espaço ainda mais simples $\ell_\infty(c_0(\omega_2))$ não é isomorfo a um subespaço de ℓ_∞/c_0. A ideia, mais uma vez, é considerar $\mathbb{P}$-nomes para as imagens de elementos da forma $\chi_{(n,\alpha)}$, $\alpha < \omega_2$, $n \in \omega$ e χ_σ, onde σ é (o gráfico de) uma função de ω em ω_2, por um potencial isomorfismo T de $\ell_\infty(c_0(\omega_2))$ sobre um subespaço de ℓ_∞/c_0.

Um caso particular que contém a essência da ideia por trás do argumento é quando a imagem de cada $\chi_{(n,\alpha)}$ por T é da forma $\chi_{U_{n,\alpha}}$ para algum aberto-fechado $U_{n,\alpha}$ em ω^* e a imagem de cada χ_σ por T é da forma χ_{U_σ} para algum aberto-fechado U_σ em ω^*. Com alguma manipulação e usando o fato que $\chi_{(n,\sigma(n))} \leq \chi_\sigma$ (pontualmente), podemos garantir que

$$U_{(n,\sigma(n))} \subseteq^* U_\sigma$$

para qualquer σ e n. Daí, pelo lema combinatório abaixo podemos construir, para cada $k \in \omega$, funções $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ cujos gráficos são dois a dois disjuntos, mas tais que

$$U_{\sigma_1} \cap \cdots \cap U_{\sigma_k} \neq \emptyset.$$

Segue então que o vetor

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_{\sigma_i}$$

tem norma 1 em $\ell_\infty(\ell_\infty/c_0)$, enquanto sua imagem

$$T(\sum_{i=1}^{n} \chi_{\sigma_i}) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{U_{\sigma_i}}$$

terá norma n, de forma que o operador T não pode ser limitado. $\square$

Lema 2.6. *Seja V um modelo de CH, $\kappa \geq \omega_2$ e $\mathbb{P} = (Fn_{<\omega}(\kappa, 2), \supseteq)$ o* forcing *que adiciona ω_2 reais de Cohen. No modelo $V^{\mathbb{P}}$, se $(E_{n,\alpha} : (n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \omega_2)$ são subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ e para cada $\sigma \in \omega_2^{\mathbb{N}}$, B_σ é um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que*

$$\forall (n,\alpha) \in \sigma \quad E_{n,\alpha} \subseteq^* B_\sigma,$$

então existe um conjunto $\Sigma \subset \omega_2^{\mathbb{N}}$ de cardinalidade ω_2 de funções com gráficos dois a dois disjuntos tal que $\{B_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ possui a propriedade de intersecção finita, ou seja, para todos $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \Sigma$, $B_{\sigma_1} \cap \cdots \cap B_{\sigma_m}$ é infinito.

Elementos da demonstração. A demonstração deste lema foi inspirada na do Teorema 4.5 de [22]. Fixamos certos $\mathbb{P}$-nomes $(\dot{E}_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N},\alpha<\omega_2}$ para uma família subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ e $(S_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N},\alpha<\omega_2}$ a família dos suportes correspondentes a esses nomes. Usando o fato que $\mathbb{P}$ tem ccc e argumentos usuais de contagem, refina-se estas famílias de forma que, para $n \in \mathbb{N}$ fixado, a família dos suportes $(S_{n,\alpha})_{\alpha<\omega_2}$ forme um Δ-sistema de conjuntos e que, para cada par $\alpha < \beta < \omega_2$, exista uma bijeção π entre eles que fixa a raiz e o automorfismo $\hat{\pi}$ de $\mathbb{P}$ induzido por π leva $\dot{E}_{n,\alpha}$ em $\dot{E}_{n,\beta}$.

Escolhemos então, indutivamente, uma família apropriada $(\sigma_\xi)_{\xi<\omega_2}$ de funções em $\omega_2^{\mathbb{N}}$ com gráficos disjuntos e uma família $(\dot{h}_\xi)_{\xi<\omega_2}$ de nomes para funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ que controlam as diferenças (finitas) $\dot{E}_{n,\alpha} \setminus \dot{B}_{\sigma_\xi}$ se $(n,\alpha) \in \sigma_\xi$. Mais precisamente:

$$\mathbb{P} \Vdash \dot{h}_\xi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ é tal que } \forall n \in \mathbb{N}\ \dot{E}_{n,\sigma_\xi(n)} \setminus \dot{B}_{\sigma_\xi} \subseteq \dot{h}_\xi(n).$$

Finalmente, refinando novamente estas famílias de forma que os suportes dos nomes $\dot{h}_\xi$ formem um Δ-sistema disjunto dos $S_{n,\sigma_\xi(n)}$, mostramos que $\mathbb{P}$ força que a família dos $\dot{B}_{\sigma_\xi}$ resultantes possui a propriedade de intersecção finita. Nesta demonstração, que não apresentamos por ser demasiado técnica, é crucial o fato que os suportes dos nomes envolvidos são tão disjuntos quanto possível, garantindo a liberdade necessária para compatibilizar condições que decidem informações acerca de uma quantidade finita de nomes $\dot{B}_{\sigma_\xi}$ e $\dot{h}_\xi$ fixados. □

Recentemente, na mesma direção, Dow mostra em [24] que sob o axioma do *forcing* próprio (PFA) certos espaços - aqueles do tipo usado em [25] - não são complementados em ℓ_∞/c_0, de forma que novos métodos são necessários para mostrar que é consistente que este espaço não é primário.

2.2 Existência de um espaço universal de densidade $\mathfrak{c}$

Vimos na seção anterior que o espaço ℓ_∞/c_0 pode ser ou não universal para a classe dos espaços de densidade $\mathfrak{c}$. O modelo em que mostramos que o espaço ℓ_∞/c_0 não é sequer isomorficamente universal, por não conter uma cópia do espaço $C([0,\omega_2])$, é o modelo de Cohen. Porém, resultados de Dow e Hart [23] e Fremlin e Nyikos [32] implicam que neste mesmo modelo existe um espaço compacto universal para a classe dos espaços compactos de peso $\mathfrak{c}$ e, consequentemente, existe um espaço de Banach isometricamente universal para a classe dos espaços de Banach de densidade $\mathfrak{c}$, de forma que esta classe possui, neste modelo, um espaço universal que não é o espaço ℓ_∞/c_0. A pergunta natural decorrente é se a classe dos espaços de Banach de densidade $\mathfrak{c}$ sempre possui um espaço universal.

Dow e Hart provaram em [23] que é consistente que não existem álgebras de Boole universais para a classe das álgebras de Boole de cardinalidade $\mathfrak{c}$. Utilizando métodos gerais de teoria dos modelos, Shelah e Usvyatsov [52] mostraram que é consistente que não existem espaços de Banach isometricamente universais de densidade $\mathfrak{c}$. Entretanto, a estrutura de um espaço isometricamente universal para uma certa classe de espaços é muito mais rígida que a daqueles que são apenas universais, já que a liberdade na escolha de um isomorfismo de norma grande permite que a cópia isomorfa de um espaço fixado que buscamos dentro do espaço universal seja bastante deformada. Uma evidência disso é a existência de espaços de Banach separáveis que são universais e não são isometricamente universais. Na próxima seção esta questão será melhor discutida.

Inspirados pela demonstração de [23] e, portanto, utilizando técnicas completamente distintas das de [52], mostramos a consistência da não existência de um espaço de Banach isomorficamente universal de densidade $\mathfrak{c}$. A ideia principal é partir de um modelo satisfazendo a hipótese do contínuo e fazer um produto de *forcings* de comprimento ω_3, obtendo um modelo em que $\mathfrak{c} = \omega_2$. Daí, as propriedades de um potencial espaço universal de tamanho $\mathfrak{c}$ estão necessariamente determinadas por uma parte inicial do *forcing* de tamanho ω_2, de forma que este objeto não pode dar conta da complexidade de objetos genéricos forçados pela parte restante do *forcing*.

Entretanto, a demonstração de Dow e Hart usa o fato que monomorfismos de álgebras preservam operações conjuntistas e a relação de inclusão, ao passo que isomorfismos de espaços de Banach são muito menos rígidos. De fato, se um isomorfismo entre espaços de Banach $C(K)$ e $C(L)$ preserva a ordem, então K e L são homeomorfos e, portanto, $C(K)$ e $C(L)$ são isométricos. No nosso caso, utilizamos uma família de subconjuntos não enumeráveis de ω_1 dita fortemente quase-disjunta, isto é, tal que a intersecção de quaisquer dois elementos é finita:

Lema 2.7. *Seja B uma subálgebra de Boole de $\wp(\omega_1)$ que contém todos os subconjuntos finitos de ω_1, K_B seu espaço de Stone e $(X_\gamma)_{\gamma\in\omega_2} \subseteq B$ uma família fortemente quase-disjunta. Então, dada uma família $(\mu_\xi)_{\xi\in\omega_1}$ de $C(K_B)^*$, existe $\gamma_0 \in \omega_2$ tal que*

$$\forall\gamma \in (\gamma_0, \omega_2) \quad \forall\xi \in \omega_1 \quad \forall X \subseteq X_\gamma \quad \textit{se } X \in B, \textit{ então } \mu_\xi([X]) = \sum_{\lambda\in X} \mu_\xi([\{\lambda\}]),$$

onde $[X]$ é o subconjunto aberto-fechado de K_B que corresponde a X pela dualidade de Stone.

Provamos então o resultado principal:

Teorema 2.8 (Teorema 1.3 de [14])**.** *É consistente que não existe um espaço de Banach isomorficamente universal de densidade $\mathfrak{c}$.*

Elementos da demonstração. Partimos de um modelo V satisfazendo a hipótese do contínuo generalizada (GCH) e fazemos o produto de dois *forcings* $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$. O primeiro deles $\mathbb{P}_1$ é o *forcing* ccc da Seção 6 de [7], que adiciona uma família fortemente quase disjunta de tamanho ω_2, que não precisa existir em ZFC. $\mathbb{P}_2$ é o *forcing* $Fn_{<\omega_1}(\omega_3 \times \omega_1, 2)$ de funções parciais enumeráveis com suporte em $\omega_3 \times \omega_1$ a valores em 2, munido da extensão (inversa) de funções $\supseteq$. Este *forcing* é σ-fechado e ω_2-cc, de forma que $\mathfrak{c} = \omega_2$ na extensão, e adiciona ω_3 subconjuntos de ω_1.

Ocorre que se existisse um espaço universal de densidade $\mathfrak{c}$ na extensão, então existiria uma álgebra de Boole B de cardinalidade $\mathfrak{c}$ na extensão tal que o espaço $C(K_B)$ seria também universal. Entretanto, uma tal álgebra B estará já determinada num modelo intermediário que não usa todo o *forcing* $Fn_{<\omega_1}(\omega_3 \times \omega_1, 2)$, de forma que se A é uma álgebra de Boole de cardinalidade ω_2 genérica sobre este modelo intermediário, não pode ocorrer que $C(K_A)$ seja isomorfo a um subespaço de $C(K_B)$. $\square$

Este resultado foi generalizado em [15] - veja a Seção 2.4.

2.3 A noção de universalidade nas distintas categorias

Vimos na introdução deste capítulo o Teorema 2.2 que garante que uma dada álgebra de Boole B é universal para a classe das álgebras de Boole de cardinalidade κ se, e somente se, seu espaço de Stone K_B é universal para a classe dos espaços compactos de peso κ. Segue como consequência que as existências de um objeto universal para a classe das álgebras de Boole de cardinalidade κ e para a classe dos espaços compactos de peso κ são equivalentes e implica, pelo Teorema 2.3, a existência de um espaço de Banach isometricamente universal para a classe dos espaços de Banach de densidade κ.

Na tentativa de distinguir entre a existência de álgebras de Boole universais e espaços de Banach universais, indagamos se, dada uma álgebra de Boole B de cardinalidade κ, o fato que $C(K_B)$ seja isometricamente universal para espaços de Banach de densidade κ implicaria que a álgebra B seja universal para álgebras de cardinalidade κ e provamos o seguinte resultado parcial:

Teorema 2.9 (Teorema 1.1 de [17]). *Dado um cardinal não enumerável κ, existe uma álgebra de Boole B de cardinalidade κ que não contém cadeias bem-ordenadas não enumeráveis (e não é, portanto, universal para álgebras de cardinalidade κ) e tal que $C(K_B)$ contém uma cópia isométrica do espaço $C([0,\omega_1])$.*

Elementos da demonstração. A demonstração deste resultado baseia-se em argumentos essencialmente elementares. A ideia principal é considerar a bola dual unitária $B_{C(K_B)^*}$ de maneira natural como um subespaço topológico do espaço produto $[0,1]^\kappa$. Como o intervalo $[0,1]$ é uma imagem contínua do conjunto de Cantor 2^ω, via a função canônica que leva cada $x=(x_n)_{n\in\omega}$ em $\sum_{n\in\omega} x_n/2^{n+1}$, temos que o espaço $[0,1]^\kappa$ é uma imagem contínua do espaço produto $(2^\omega)^\kappa$ pela função ϕ definida coordenada a coordenada como acima. Se denotamos por L a pré-imagem de $B_{C(K_B)^*}$ por ϕ, temos que $C(B_{C(K_B)^*})$ é isométrico a um subespaço de $C(L)$, de forma que $C(L)$ contém uma cópia isométrica do espaço $C(K_B)$, já que este é isométrico ao espaço $C(B_{C(K_B)^*})$.

Para mostrar que L não contém cadeias de abertos-fechados bem-ordenadas não enumeráveis, usamos outras propriedades da função ϕ, tais como a preservação de convexos em ambas as direções, para mostrar que uma tal cadeia $(U_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ em L daria origem, em sua imagem por ϕ, a uma versão mais forte de cadeia $(V_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ de abertos bem-ordenada, em que o fecho $\overline{V}_\alpha$ de um aberto da cadeia está contido nos abertos V_β de índices β maiores que α. Por outro lado, a imagem de L, por ser a bola $B_{C(K_B)^*}$, não poderá conter tais tipos de cadeias, devido a um resultado de Kaplansky que garante que o *tightness* na topologia fraca de toda bola dual de um espaço de Banach é enumerável. □

A pergunta não foi feita para espaços topológicos compactos quaisquer no lugar dos booleanos (ou das álgebras de Boole), pois já sabemos, pelo Teorema de Banach-Mazur, que $C([0,1])$ é isometricamente universal para espaços de Banach separáveis e o espaço $[0,1]$ não pode ser universal para espaços metrizáveis pelo simples fato que $[0,1]$ é conexo e existem espaços compactos de qualquer peso (em particular, metrizáveis) que não são conexos e, portanto, não podem ser imagem contínua de espaços conexos. Note porém que $C([0,1])$ é isomorfo a $C(2^\omega)$ (e 2^ω é universal para os metrizáveis), de forma que a seguinte pergunta que não sabemos responder faz sentido: se $C(K)$ é isometricamente universal para espaços de densidade κ, será que então necessariamente existe L universal para espaços de peso κ tal que $C(L)$ e $C(K)$ são isomorfos. No artigo [39], Koszmider revisa nossos e outros resultados desde uma perspectiva mais geral, relacionando classes de álgebras de Boole com classes de espaços compactos e espaços de Banach, para as quais a existência de um objeto universal implica a existência de um objeto universal na outra classe.

2.4 Espaços gerados por espaços de Hilbert

Um espaço compacto K é dito um compacto de Eberlein uniforme se é homeomorfo a um subconjunto fracamente compacto de um espaço de Hilbert. Bell mostrou em [8] que para qualquer cardinal κ satisfazendo $\kappa = |2^{<\kappa}|$, existe um espaço universal para a classe dos espaços compactos de Eberlein uniformes de peso κ, de forma que, assumindo a hipótese do contínuo, existe um espaço universal para a classe dos espaços compactos de Eberlein uniformes de peso $\mathfrak{c}$. Por outro lado, no mesmo trabalho, Bell mostrou que é consistente que não existem espaços universais para esta mesma classe.

Fabian, Godefroy e Zizler mostraram em [29] que se K é um compacto de Eberlein uniforme (de peso κ), então $C(K)$ é um espaço de Banach (de densidade κ) gerado por um espaço de Hilbert, ou seja, existe um espaço de Hilbert H e um operador de H sobre um subconjunto denso de $C(K)$.

Usando ainda o fato que se X é um espaço de Banach gerado por um espaço de Hilbert, então a bola dual unitária B_{X^*}, munida da topologia fraca*, é um compacto de Eberlein uniforme, pode-se provar que se K é universal para a classe dos espaços compactos de Eberlein de peso κ, então $C(K)$ é universal para a classe dos espaços de Banach de densidade κ que são gerados por um espaço de Hilbert (ver Proposição 1.2 de [15]). Decorre então do resultado de Bell que, sob a hipótese do contínuo, existe um espaço universal para a classe dos espaços de Banach de densidade $\mathfrak{c}$ que são gerados por um espaço de Hilbert. Assim, uma pergunta natural é se a negação desta afirmação também é consistente, como ocorre no contexto dos espaços topológicos.

O principal resultado do trabalho [15] garante esta consistência:

Teorema 2.10 (Teorema 1.3 de [15]). *É consistente que não existe um espaço de Banach de densidade $\mathfrak{c}$ que contém uma cópia isomorfa de todo espaço de Banach de densidade $\mathfrak{c}$ gerado por um espaço de Hilbert. Em particular, é consistente que não existem espaços universais para a classe dos espaços de Banach de densidade $\mathfrak{c}$ gerados por um espaço de Hilbert.*

Elementos da demonstração. Assim como no caso do Teorema 2.8, a ideia é obter um modelo em que $\mathfrak{c} = \omega_2$ por meio de um produto de comprimento ω_3 de *forcings* que adicionam espaços de densidade $\mathfrak{c}$ gerados por um espaço de Hilbert. Novamente, as propriedades de um objeto de tamanho $\mathfrak{c}$ estão necessariamente determinadas por uma parte inicial do *forcing* de tamanho ω_2, de forma que este objeto não pode conter cópias dos objetos genéricos forçados pela parte restante do *forcing*.

Primeiramente, introduzimos um *forcing* $\mathbb{Q}$ que adiciona a qualquer modelo V uma álgebra de Boole genérica B de cardinalidade $\mathfrak{c}$ que satisfaz uma propriedade introduzida por Bell em [8]: B é uma (c)-álgebra, ou seja, B é gerada por um número enumerável de anticadeias $(A_{\xi,i})_{\xi<\mathfrak{c}}$ duas a duas disjuntas, de forma que a união finita $A_{\xi_1,i_1} \vee \cdots \vee A_{\xi_k,i_k}$ de elementos de distintas anticadeias nunca é 1_B. Bell introduziu esta noção e provou que se B é uma (c)-álgebra, então o espaço de Stone K_B de B é um compacto de Eberlein uniforme. O *forcing* que adiciona uma tal álgebra B é um *forcing* σ-fechado e ω_2-cc formado por conjuntos enumeráveis de funções parciais enumeráveis de ω em subconjuntos enumeráveis de ω_2.

Então, partindo de um modelo que satisfaz a hipótese do contínuo, fazemos um produto de dois *forcings* $\mathbb{P}_1$ e $\mathbb{P}_2$, onde o $\mathbb{P}_1$ é o *forcing* que adiciona ω_2 reais de Cohen, obtendo que $\mathfrak{c} = \omega_2$, e $\mathbb{P}_2$ é uma espécie de produto de tamanho ω_3 com suportes enumeráveis do *forcing* $\mathbb{Q}$ mencionado no parágrafo anterior, de forma que são adicionadas simultaneamente ω_3 (c)-álgebras $(B_\alpha)_{\alpha<\omega_3}$ (e, portanto, ω_3 compactos de Eberlein uniformes).

Provamos então que este produto segue sendo ω_2-cc, de forma que $\mathfrak{c} = \omega_2$ na extensão e de fato um espaço de Banach de densidade ω_2 nesta extensão não contém cópia de todos os espaços $C(K_{B_\alpha})$. $\square$

Uma questão que pode ser investigada quando não há um espaço universal para uma classe de objetos é qual o menor tamanho de uma família de objetos na classe tal que qualquer outro objeto da classe é isomorfo (ou imagem contínua) de um elemento da família. Esta noção é investigada por Džamonja em [26] no contexto dos espaços de Banach.

Capítulo 3

Espaços sem sequências subsimétricas

Neste capítulo apresentamos resultados e técnicas desenvolvidas conjuntamente com J. Lopez-Abad e S. Todorcevic e apresentados em detalhes no trabalho [18], submetido para publicação. O objetivo principal é provar um resultado relacionado à existência de sequências subsimétricas em espaços de Banach de densidade grande:

Definição 3.1 (Sequência subsimétrica). *Uma sequência $(x_n)_{n\in\omega}$ em um espaço de Banach X é dita subsimétrica se existe uma constante $C \geq 1$ tal que para quaisquer sequências finitas estritamente crescentes $m_1 < \cdots < m_k$ e $n_1 < \ldots n_k$ e qualquer sequência de escalares $(a_i)_{i=1}^k$,*

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{m_i}\| \leq C\|\sum_{i=1}^{k} a_i x_{n_i}\|.$$

Esta é uma das possíveis noções, no contexto dos espaços de Banach, para o que se conhece por conjunto indiscernível na área de teoria dos modelos: conjuntos X munidos de uma ordem total $<$ tais que quaisquer duas n-uplas crescentes de elementos de X têm as mesmas propriedades na estrutura em questão.

Exemplos clássicos de sequências subsimétricas são as bases unitárias canônicas dos espaços ℓ_p, $p \geq 1$ ou c_0. O espaço de Schreier [50] possui uma base unitária sem subsequências subsimétricas. Sua construção está baseada na família de Schreier

$$\mathcal{S} = \{s \in [\omega]^{<\omega} : |s| \leq \min s + 1\},$$

cujas propriedades combinatórias garantem características interessantes ao espaço de Banach, que é obtido pelo completamento do espaço c_{00} munido

da norma
$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_{\mathcal{S}} = \sup\{\sum_{i\in s} |a_i| : s \in \mathcal{S}\}.$$
No anos 70, Tsirelson [59] construiu o primeiro exemplo de um espaço de Banach reflexivo (separável) sem quaisquer sequências subsimétricas, obtido pelo completamento do espaço c_{00} munido de uma norma definida recursivamente por

$$\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\|_T = \sup\{\|x\|_\infty, \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \|\sum_{i\in s_j} a_i e_i\|_T : s_j < s_{j+1},\ \{\min s_j\}_{1\le j\le n} \in \mathcal{S}\}.$$

A principal dificuldade para construir versões não separáveis destes espaços reside no fato que, tipicamente, estruturas grandes contêm subestruturas pequenas indiscerníveis, sendo o principal resultado desse tipo o clássico teorema de Ramsey.

No contexto de espaços de Banach, Ketonen [37] mostrou que se um espaço tem densidade muito grande - igual ao primeiro cardinal ω-Erdös - então ele possui subsequências subsimétricas e, por outro lado, Odell [45] mostrou que existe um espaço de densidade contínuo, não reflexivo, que não possui sequências subsimétricas. Apenas recentemente, Lopez-Abad e Todorcevic [43] construíram versões não separáveis do espaço de Schreier usando, no lugar da família de Schreier, as chamadas famílias compactas, hereditárias e grandes em conjuntos de índices de cardinalidade não enumerável. Porém, fazendo o mesmo para tentar generalizar o espaço de Tsirelson para o contexto não separável não funciona: a generalização natural do espaço de Tsirelson, usando uma família num conjunto de índices de cardinalidade grande, possui sequências subsimétricas.

Em nosso trabalho, usamos o método de interpolação para mesclar espaços do tipo Schreier não separáveis com o espaço de Tsirelson, de forma que o espaço resultante não contém sequências subsimétricas. Inicialmente, obtivemos, para todo cardinal κ menor que o primeiro cardinal inacessível, espaços de Banach reflexivos de densidade κ sem sequências subsimétricas, generalizando um resultado de [4], obtido simultânea e independentemente por Argyros e Motakis. Posteriormente, utilizamos o método de *walks on ordinals* de Todorcevic [57] para generalizar esta construção para cardinais menores que o primeiro cardinal Mahlo. Mais ainda, refinamos os argumentos de forma não só a garantir a não existência de sequências subsimétricas, mas também a ter um controle sobre a complexidade dos modelos ℓ_1-*spreading* existentes no espaço:

Definição 3.2 (famílias de Schreier generalizadas, modelo *spreading*)**.** *Seja* $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ *uma sequência de famílias de Schreier generalizadas:*

$$\mathcal{S}_0 = [\omega]^{\leq 1}$$

$$\mathcal{S}_{\alpha+1} = \mathcal{S}_\alpha \otimes \mathcal{S} := \{\bigcup_{i=1}^{k} s_i : s_1 < \cdots < s_k,\ s_i \in \mathcal{S}_\alpha,\ \{\min s_i : 1 \leq i \leq k\} \in \mathcal{S}\}$$

$$\mathcal{S}_\alpha = \bigcup_{n<\omega} (\mathcal{S}_{\alpha_n} \upharpoonright \omega \setminus n),$$

onde $(\alpha_n)_n$ *é uma sequência de ordinais tais que* $\sup_n \alpha_n = \alpha$*, se* α *é um ordinal limite.*

Daí, uma sequência limitada $(x_n)_{n\in\omega}$ *em um espaço de Banach* X *é dita um modelo* ℓ_1^α-spreading *se existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\|\sum_{n\in s} a_n x_n\| \geq C \sum_{n\in s} |a_n| \text{ para todo } s \in \mathcal{S}_\alpha.$$

A sequência de espaços que interpolamos com o espaço de Tsirelson é obtida por meio de uma sequência de famílias chamadas homogêneas, que generalizam, para conjuntos de índices não enumeráveis, não apenas a família de Schreier em si, mas as operações envolvidas na definição das famílias de Schreier generalizadas (em ω) ou, mais geralmente, as operações entre as chamadas famílias uniformes. A principal dificuldade é mostrar a existência destas sequências de famílias nesses conjuntos de índices não enumeráveis. Para isso, introduzimos o conceito de uma base de famílias, que são coleções de famílias homogêneas suficientemente ricas para garantir a existência das sequências necessárias para a interpolação. Provamos então o principal resultado que é a existência de bases em conjuntos de índices de cardinalidade menor que o primeiro cardinal Mahlo.

A demonstração da existência das bases para esses cardinais é feita por indução, assumindo a existência de bases para cardinais menores que um certo cardinal κ. Distinguimos três casos: quando κ é um cardinal que não é limite forte, ou seja, existe $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$, passamos de uma base de famílias em λ para uma base de famílias em 2^λ, usando árvores binárias. Se κ é regular e é um limite forte, então usamos o método de *walks on ordinals* de Todorcevic [57] e a existência de uma árvore de Aronszajn κ-especial. O caso singular, por ser um cardinal que pode ser "alcançado" a partir de cardinais menores, é o mais simples. Os métodos envolvem uma análise de famílias de subconjuntos finitos de estruturas como árvores ou outras ordens parciais. Apresentamos a seguir estas técnicas.

3.1 Famílias homogêneas e bases de famílias

Seja I um conjunto de índices. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma família em I se é uma família de subconjuntos finitos de I. Tipicamente, vamos exigir que $[I]^{\leq 1} \subseteq \mathcal{F}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é hereditária se é fechada por subconjuntos e dizemos que é compacta se é um subespaço compacto de 2^I, munido da topologia produto, quando identificamos cada elemento s de $\mathcal{F}$ com sua função característica $\chi_s \in 2^I$. As famílias que consideramos aqui são sempre compactas e hereditárias.

Se $\mathcal{F}$ é uma família em ω e $n < \omega$, seja $\mathcal{F}_{\{n\}} := \{s \subseteq \omega : n < s \text{ e } \{n\} \cup s \in \mathcal{F}\}$. Dado $\alpha < \omega_1$, uma família $\mathcal{F}$ em um conjunto infinito $M \subseteq \omega$ é dita α-uniforme se $\emptyset \in \mathcal{F}$ e

(a) $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ se $\alpha = 0$;

(b) $\mathcal{F}_{\{n\}}$ é β-uniforme em M/n para todo $n \in M$, se $\alpha = \beta + 1$;

(c) $\mathcal{F}\{n\}$ é α_n-uniforme em M/n para todo $n \in M$ e $(\alpha_n)_{n \in M}$ é uma sequência crescente tal que $\sup_{n \in M} \alpha_n = \alpha$, se α é limite.

A família de Schreier é uma família ω-uniforme em ω e as famílias de Schreier generalizadas, que são úteis em construções de modificações do espaço de Tsirelson no contexto separável, também o são. Desta forma, generalizamos este conceito para o contexto de famílias em conjuntos de índices I de cardinalidade maior que ω e introduzimos o conceito de famílias homogêneas. Mais ainda, para mostrar nosso resultado para cardinais menores que o primeiro cardinal inacessível ou menores que o primeiro cardinal de Mahlo, utilizamos uma indução e construímos famílias homogêneas em conjuntos de índices grandes usando famílias em conjuntos de índices menores. Neste processo, precisamos trabalhar com famílias em conjuntos de índices parcialmente ordenados, de forma que as definições devem ser todas feitas neste contexto.

Recordamos que se X é um espaço topológico, então podemos construir a hierarquia de conjuntos derivados de X: X' é o conjunto dos pontos não isolados de X, $X^(0) = X$ e, para cada ordinal $\alpha > 0$, $K^{(\alpha)} = \cap\{(K^{(\beta)})' : \beta < \alpha\}$. O menor ordinal α para o qual $X^{(\alpha+1)} = X^{(\alpha)}$ sempre existe e é chamado de índice de Cantor-Bendixson de X. Quando X é disperso, temos que se α é o índice de Cantor-Bendixson de X, então $X^{(\alpha)} = \emptyset$ e, portanto, α é o ordinal sucessor de outro ordinal, este chamado de *rank*de Cantor-Bendixson de X e denotado por $\mathrm{rk}(X)$.

Observamos que uma família compacta e hereditária em um conjunto de índices I é dispersa (também como subespaço de 2^I), de forma que podemos usar $\mathrm{rk}(\mathcal{F})$ para ter um controle sobre sua uniformidade, como no caso das famílias uniformes.

Definição 3.3 (Família homogênea). *Se $\mathcal{F}$ é uma família em um conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P} = (P, <)$, definimos*

$$\mathrm{srk}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) = \min\{\mathrm{rk}(\mathcal{F} \upharpoonright C) : C \text{ é uma cadeia infinita de } P\},$$

onde $\mathcal{F} \upharpoonright C = \mathcal{F} \cap \wp(C)$. Uma família em cadeias de $\mathcal{P}$, ou seja, formada por cadeias (finitas) de $\mathcal{P}$ é dita α-homogênea para um $\omega \leq \alpha < \omega_1$ se

$$\alpha = \mathrm{srk}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) \leq \mathrm{rk}(\mathcal{F}) < \iota(\alpha),$$

onde $\iota(\alpha)$ é o menor ordinal $\beta > \alpha$ tal que β é exponencialmente indecomponível, i.e., se $\gamma, \lambda < \beta$, então $\gamma^\lambda < \beta$. Uma família em cadeias de $\mathcal{P}$ é dita homogênea se é α-homogênea para algum $\omega \leq \alpha < \omega_1$.

Observamos que se $\mathcal{F}$ é uma família α-uniforme em ω, então $\mathcal{F}$ é α-homogênea.

Uma primeira aplicação interessante destas famílias é a seguinte versão do espaço de Schreier no contexto não separável, onde há controle sobre os modelos *spreading* existentes:

Proposição 3.4. *Se $\mathcal{F}$ é uma família α-homogênea em um cardinal κ, então o espaço de Banach $X_{\mathcal{F}}$, obtido pelo completamento do espaço $c_{00}(\kappa)$ munido da norma*

$$\|\sum_{\alpha \in F} a_\alpha e_\alpha\|_{\mathcal{F}} = \sup\{\sum_{\alpha \in s} |a_\alpha| : s \in \mathcal{F},\ s \subseteq F\}$$

*é um espaço de Banach de densidade κ em que $(e_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é uma base longa 1-incondicional tal que toda subsequência de $(e_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ possui uma subsequência que é um modelo ℓ_1^α-*spreading *e nenhuma subsequência de $(e_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é um modelo $\ell_1^{\iota(\omega^\alpha)}$-*spreading.

Observe que nesse resultado a única informação que obtemos é sobre as possíveis subsequências da base $(e_\alpha)_{\alpha<\kappa}$, como no caso do espaço de Schreier. Queremos agora tratar do problema sobre sequências quais no espaço e para isso precisamos, como dito, introduzir uma operação entre famílias em $\mathcal{P}$ e famílias *spreading*: uma família $\mathcal{H}$ em ω é dita *spreading* se para qualquer $\{m_1, \ldots, m_k\} \in \mathcal{F}$ e $m_i \leq n_i$, $1 \leq i \leq k$, temos que $\{n_1, \ldots, n_k\} \in \mathcal{F}$. Finalmente passamos às definições fundamentais no trabalho:

Definição 3.5 (Multiplicação e base de famílias)**.** *Dada uma família $\mathcal{F}$ em cadeias de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{H}$ uma família uniforme e* spreading *em ω, dizemos que uma família $\mathcal{G}$ em cadeias de $\mathcal{P}$ é uma multiplicação de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{H}$ se duas condições são satisfeitas:*

(a) $\mathcal{G}$ é homogênea e $\iota(\mathrm{srk}_{\mathcal{P}}(\mathcal{G})) = \iota(\mathrm{srk}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F}) \cdot \mathrm{srk}(\mathcal{H}))$;

(b) toda sequência infinita $(s_n)_n$ de $\mathcal{F}$ tal que $\bigcup_n s_n$ é uma cadeia possui uma subsequência infinita $(t_n)_n$ tal que para todo $x \in \mathcal{H}$, $\bigcup_{n\in x} t_n \in \mathcal{G}$.

$\mathfrak{B}$ é uma base de famílias homogêneas em cadeias de $\mathcal{P}$ se satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mathfrak{B}$ é uma coleção de famílias compactas, hereditárias e homogêneas em cadeias de $\mathcal{P}$, que contém todos os cubos $[P]^{\leq n}_{\mathcal{P}}$ (i.e. as famílias formadas por todas as cadeias de $\mathcal{P}$ de cada tamanho n) e famílias α-homogêneas para todo $\omega \leq \alpha < \omega_1$.

(ii) $\mathfrak{B}$ é fechada pelas operações $\cup$ e $\sqcup_{\mathcal{P}}$, onde

$$\mathcal{F} \sqcup_{\mathcal{P}} \mathcal{G} = \{s \cup t : s \in \mathcal{F}, t \in \mathcal{G}, s \cup t \text{ é uma cadeia em } \mathcal{P}\},$$

e se $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \in \mathfrak{B}$ é tal que $\iota(\mathrm{srk}_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})) = \iota(\mathrm{srk}_{\mathcal{P}}(\mathcal{G}))$, então $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}$.

(iii) Para toda $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}$ e toda família uniforme e spreading *$\mathcal{H}$ em ω, existe $\mathcal{G} \in \mathfrak{B}$ que é uma multiplicação de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{H}$.*

O primeiro exemplo, que será útil como passo inicial da indução que faremos em seguida, é o de uma base em ω:

Teorema 3.6. *Existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de ω.*

Elementos da demonstração. Seja $\mathfrak{B}$ a coleção de todas as famílias homogêneas $\mathcal{F}$ tais que existe uma família uniforme $\mathcal{G}$ com $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ e $\iota(\mathrm{srk}(\mathcal{F})) = \iota(\mathrm{srk}(\mathcal{G}))$.

Como vimos, toda família α-uniforme em ω é α-homogênea, de forma que garantimos a condição (i) da definição de base por meio das famílias de Schreier generalizadas. A demonstração da condição (ii) é feita de maneira natural. Para mostrar (iii), dadas $\mathcal{F} \in \mathfrak{B}$ e $\mathcal{H}$ uma família hereditária, uniforme e *spreading* em ω, consideramos $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$ como acima e

$$\mathcal{G}' = \{s \cup \bigcup_{i=1}^{k} s_i : s < s_1 < \cdots < s_k,\ s, s_1, \ldots, s_k \in \mathcal{G} \text{ e } \{\min s_i : 1 \leq i \leq k\} \in \mathcal{H}\}$$

e provamos que $\mathcal{G}'$ é uma multiplicação de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{H}$. Para isso, basta extrair de uma sequência $(s_n)_{n\in\omega}$ de $\mathcal{F}$, por recursão, um Δ-sistema $(t_n)_{n\in\omega}$ em posição de blocos, ou seja, de forma que se t é a raiz do Δ-sistema, então $t < t_0 \setminus t < t_1 \setminus t < \dots$ e mostrar que a união indexada em um conjunto de $\mathcal{H}$ de elementos deste Δ-sistema pertence a $\mathcal{G}'$. □

3.2 Interpolação e indução

A motivação para as definições apresentadas na seção anterior veio do que se mostrou necessário, usando o método de interpolação, para obter o resultado desejado:

Proposição 3.7. *Se existe $(\mathcal{F}_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de famílias homogêneas em cadeias de um cardinal infinito κ tal que para todo $n \in \omega$ $\mathcal{F}_{n+1}$ é uma multiplicação de $\mathcal{F}_n$ pela família de Schreier $\mathcal{S}$, então existe uma norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ no espaço vetorial $c_{00}(\kappa)$ tal que o completamento $\mathfrak{X}$ de $(c_{00}(\kappa), \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ é um espaço de Banach reflexivo em que $(e_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é uma base 1-incondicional e sem sequências subsimétricas.*

Elementos da demonstração. A norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ é obtida por meio de uma interpolação das normas $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_n}$ já definidas anteriormente, com a norma do espaço de Tsirelson: dado $x \in c_{00}(\kappa)$, seja

$$\|x\| = \|\sum_{n\in\omega} \frac{\|x\|_{\mathcal{F}_n}}{2^{n+1}} e_n\|_T.$$

□

Uma versão que nos dá mais informação acerca das sequências do espaço $\mathfrak{X}$ é quando a sequência é formada por famílias α-homogêneas para um $\omega \leq \alpha < \omega_1$ fixado:

Proposição 3.8. *Dado, $\omega \leq \alpha < \omega_1$, se existe $(\mathcal{F}_n)_{n\in\omega}$ uma sequência de famílias de cadeias α-homogêneas em um cardinal infinito κ tal que para todo $n \in \omega$ $\mathcal{F}_{n+1}$ é uma multiplicação de $\mathcal{F}_n$ pela família de Schreier $\mathcal{S}$, então existe uma norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{X}}$ no espaço vetorial $c_{00}(\kappa)$ tal que o completamento $\mathfrak{X}$ de $(c_{00}(\kappa), \|\cdot\|_{\mathfrak{X}})$ é um espaço de Banach reflexivo em que $(e_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ é uma base 1-incondicional e toda sequência de $\mathfrak{X}$ possui um modelo ℓ_1^α-spreading, mas $\mathfrak{X}$ não tem modelos ℓ_1^β-spreading para β suficientemente grande, dependendo de α.*

Tendo esses dois resultados em mente, nosso principal objetivo no trabalho é mostrar o seguinte teorema:

Teorema 3.9 (Teorema 4.1 de [18]). *Para todo cardinal infinito κ menor que o primeiro cardinal de Mahlo, existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ.*

Não definiremos cardinal Mahlo aqui, já que a principal propriedade que necessitamos é que se κ é regular, limite forte e não é um cardinal Mahlo, então existe uma árvore κ-Aronszajn especial. Esta noção será introduzida quando indicarmos a demonstração do teorema acima. Segue imediatamente o resultado sobre espaços de Banach que queríamos provar:

Corolário 3.10. *Para todo cardinal infinito κ menor que o primeiro cardinal de Mahlo, existe um espaço de Banach reflexivo $\mathfrak{X}$ de densidade κ com base 1-incondicional e tal que toda sequência de $\mathfrak{X}$ possui um modelo ℓ_1^α-spreading, mas $\mathfrak{X}$ não tem modelos ℓ_1^β-spreading para β suficientemente grande, dependendo de α. Em particular, $\mathfrak{X}$ não possui sequências subsimétricas.*

Demonstração. Basta construir recursivamente uma sequência $(\mathcal{F}_n)_{n\in\omega}$ de famílias α-homogêneas em cadeias de κ tal que para todo $n \in \omega$, $\mathcal{F}_{n+1}$ é uma multiplicação de $\mathcal{F}_n$ pela família de Schreier $\mathcal{S}$ e aplicar a Proposição 3.8. □

A demonstração do Teorema 3.9 é feita por indução. Lembramos que já temos a existência de uma base em ω, e supondo $\kappa > \omega$ um cardinal infinito menor que o primeiro cardinal Mahlo tal que para todo $\lambda < \kappa$ infinito, existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de λ, mostramos que existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ. Tipicamente, a dificuldade é conseguir uma coleção para a qual possamos definir uma multiplicação. Como dissemos na introdução, consideramos três casos: quando κ é um cardinal que não é limite forte, quando κ é regular e é um limite forte e quando κ é singular. Apresentamos nas próximas duas seções os resultados relativos aos dois primeiros casos, respectivamente, sendo que o terceiro é o caso mais simples e não o apresentamos aqui. O segundo caso é uma espécie de generalização do primeiro.

3.3 Indução usando árvores binárias

Nesta seção apresentamos os principais passos da demonstração do seguinte resultado:

Teorema 3.11. *Se existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de um cardinal infinito κ, então existe uma base de famílias homogêneas em cadeias do cardinal 2^κ.*

Dada uma ávore T (com uma única raiz, ou seja, um único elemento minimal), denotamos por $<_c$ a ordem parcial usual da árvore T. Dado um conjunto $X \subseteq T$ (finito ou infinito), denotamos por $\langle X \rangle$ a subárvore gerada por X, ou seja, o menor subconjunto de T que contém X e é fechado pela operação $\wedge$ definida por $t \wedge u = \max\{v \in T : v \leq_T t \text{ e } v \leq_T u\}$.

A ideia principal é considerar a árvore binária completa $T = 2^{\leq \kappa}$ e usar a função altura $ht : T \to \kappa + 1$, que associa cada nó da árvore ao nível em que se encontra, para passar de famílias em $\kappa + 1$ a famílias em T. Assim, dada uma família $\mathcal{F}$ em κ, definimos:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{F}} = \{s \in [T]^{<\omega} : ht''\langle s \rangle \in \mathcal{F}\}.$$

O primeiro passo é então mostrar o seguinte:

Proposição 3.12. *Se $\mathcal{F}$ é uma família compacta, hereditária e α-homogênea em cadeias de $\kappa + 1$, então $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ é uma família compacta, hereditária e α-homogênea em cadeias de T (onde T é a árvore binária $2^{\leq \kappa}$ munida de qualquer ordem total $<$, e não de sua ordem usual $<_c$).*

Elementos da demonstração. A hereditariedade é trivial. Para mostrar a compacidade de $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, o elemento fundamental é o Teorema de Ramsey, que é usado para mostrar que para todo subconjunto infinito X de $2^{\leq \omega}$, $\langle X \rangle$ possui uma cadeia infinita. Para mostrar a homogeneidade da família, são necessários diversos lemas que controlam $\mathrm{srk}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ e $\mathrm{rk}(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ em termos de $\mathrm{srk}(\mathcal{F})$ e $\mathrm{rk}(\mathcal{F})$. □

Assim, por meio desta operação, naturalmente obtemos, a partir de uma base $\mathfrak{B}$ em $\kappa + 1$, uma coleção de famílias compactas, hereditárias e α-homogêneas em cadeias de T. Resta mostrar que esta coleção é de fato uma base em T. Nesse sentido, o segundo passo crucial é provar que:

Proposição 3.13. *Se $\mathcal{F}$ é uma família compacta, hereditária e α-homogênea em cadeias de $\kappa + 1$, $\mathcal{H}$ é uma família hereditária, uniforme e spreading em ω e $\mathcal{G}$ é uma multiplicação de $\mathcal{F}$ por $\mathcal{H}$, então $\mathcal{B}_{\mathcal{G}}$ é uma multiplicação de $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ por $\mathcal{H}$.*

A demonstração desta proposição envolve uma análise combinatória dos subconjuntos finitos da árvore binária.

Demonstração do Teorema 3.11. Se existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ, como a noção para conjuntos totalmente ordenados depende apenas da cardinalidade conjunto, temos que existe uma base $\mathfrak{B}$ de famílias de cadeias homogêneas em $\kappa + 1$. Daí, considere

$$\mathfrak{B}' = \{\mathcal{B}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \in \mathfrak{B}\}.$$

Usando as proposições anteriores, mostramos que $\mathfrak{B}'$ é uma base de famílias homogêneas em cadeias de T □

Completamos assim o primeiro tipo de passo indutivo:

Corolário 3.14. *Se κ é um cardinal infinito tal que para todo $\omega \leq \lambda < \kappa$ existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de λ e κ não é um limite forte, então existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ.*

Demonstração. Se κ não é limite forte, por definição existe $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$ e, a partir de uma base em λ, podemos obter uma base na árvore binária $2^{\leq\lambda}$. Daí, temos uma base no cardinal 2^λ e, portanto, em qualquer cardinal menor que 2^λ, em particular em κ. □

Consequências diretas são versões do resultados principais deste capítulo para cardinais menores que o primeiro cardinal inacessível, que foi a primeira versão que obtivemos, lembrando que um cardinal κ não enumerável é inacessível se é regular e limite forte, ou seja, para todo $\lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$.

Corolário 3.15. *Para todo cardinal infinito κ menor que o primeiro cardinal inacessível, existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ. Portanto, para cada $\omega \leq \alpha < \omega_1$, existe também um espaço de Banach reflexivo $\mathfrak{X}$ de densidade κ com base 1-incondicional e tal que toda sequência de $\mathfrak{X}$ possui um modelo ℓ_1^α-spreading, mas $\mathfrak{X}$ não tem modelos ℓ_1^β-spreading para β suficientemente grande, dependendo de α. Em particular, $\mathfrak{X}$ não possui sequências subsimétricas.*

Elementos da demonstração. Seja κ infinito e menor que o primeiro cardinal inacessível. Se $\kappa = \omega$, o Teorema 3.6 garante a existência de uma base de famílias homogêneas em cadeias. Senão, suponhamos que o resultado vale para todo cardinal menor que κ e temos que existe $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$. Daí, pela hipótese indutiva existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de λ e, pelo Corolário 3.14, segue que existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ.

Assim como na demonstração do Corolário 3.10, as afirmações sobre a existência e as propriedades do espaço de Banach $\mathfrak{X}$ seguem da Proposição 3.8, depois de extrair, da base, uma sequência de famílias como na hipótese daquela proposição. □

3.4 Indução usando árvores mais gerais

Nesta seção apresentamos os principais passos da demonstração do seguinte resultado, que pode ser considerado como o principal resultado de todo o trabalho [18]:

Teorema 3.16. *Se T é uma árvore infinita, então são equivalentes:*

(a) Existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de T (munida de qualquer ordem total $<$).

(b) Existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de $(T, <_c)$, se T tem $<_c$-cadeias infinitas, e existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de $(T, <_a)$, se T tem $<_a$-cadeias infinitas.

A demonstração deste resultado é complexa e profunda. A etapa principal é a demonstração de que (b) implica (a) quando ambas as ordens parciais possuem cadeias infinitas, diferentemente do que ocorre na árvore binária da seção anterior, em que as cadeias com relação a $<_a$ têm no máximo dois elementos. Para apresentarmos os principais passos desta demonstração, introduzimos a seguinte notação: dada uma árvore T e dados $t, u \in T$, dizemos que u é um sucessor imediato de t se $t < u$ e não existe $v \in T$ tal que $t < v < u$. Denotamos por Is_t o conjunto de todos os sucessores imediatos de t em T e dado $s \subseteq T$, seja

$$Is_t''s = \{u \in Is_t : \text{ existem } t_0 \neq t_1 \in s,\ u \leq t_0, t_1\}.$$

Além disso, vamos considerar aqui a ordem parcial $<_c$ usual da árvore T e uma outra ordem parcial $<_a$ tal que t e u são sucessores imediatos distintos de um mesmo nó $v \in T$ se, e somente se, $t <_a u$ ou $u <_a t$. Daí, dadas uma família $\mathcal{A}$ compacta, hereditária e α-homogênea em cadeias de $(T, <_a)$ e uma família $\mathcal{C}$ compacta, hereditária e α-homogênea em cadeias de $(T, <_c)$, definimos

$$\mathcal{A} \odot \mathcal{C} = \{s \in [T]^{<\omega} : \forall t \in T, Is_t''\langle s\rangle \in \mathcal{A} \textit{ e } \forall C \subseteq \langle s\rangle \textit{ cadeia },\ C \in \mathcal{C}\}.$$

O primeiro passo, é mostrar o seguinte resultado, que pode ser visto como uma versão parcial da Proposição 3.12 para este caso mais complexo:

Proposição 3.17. *Se $\mathcal{A}$ é uma família compacta e hereditária em cadeias de $(T, <_a)$ e $\mathcal{C}$ é uma família compacta e hereditária em cadeias de $(T, <_c)$, então $\mathcal{A} \odot \mathcal{C}$ é uma família compacta e hereditária em cadeias de T (onde T aqui é munida de qualquer ordem total).*

Elementos da demonstração. Mais uma vez a hereditariedade é simples e o elemento fundamental para mostrar a compacidade é o Teorema de Ramsey, que é usado para mostrar que para todo subconjunto infinito X de T, ou $\langle X\rangle$ possui uma cadeia infinita, ou existe um $t \in T$ tal que $Is''_t\langle X\rangle$ é infinito, o que garante a compacidade de $\mathcal{A} \odot \mathcal{C}$ a partir da compacidade das famílias $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$. $\square$

Aqui, a demonstração da homogeneidade de $\mathcal{A} \cdot \mathcal{C}$ a partir da homogeneidade de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ é bastante mais complexa e exige uma série de lemas intermediários para provar o seguinte:

Lema 3.18. *Se λ é exponencialmente indecomponível, então*

$$\mathrm{rk}(\mathcal{A}), \mathrm{rk}(\mathcal{C}) < \lambda \Rightarrow \mathrm{rk}(\mathcal{A} \odot \mathcal{C}) < \lambda.$$

Por outro lado, uma das seguintes alternativas é verdadeira:

- $\mathrm{srk}(\mathcal{A} \odot \mathcal{C}) \leq \mathrm{srk}_a(\mathcal{A})$ *e* $\iota(\mathrm{srk}(\mathcal{A} \odot \mathcal{C})) = \iota(\mathrm{srk}_a(\mathcal{A}))$,
- $\mathrm{srk}(\mathcal{A} \odot \mathcal{C}) \leq \mathrm{srk}_c(\mathcal{C})$ *e* $\iota(\mathrm{srk}(\mathcal{A} \odot \mathcal{C})) = \iota(\mathrm{srk}_c(\mathcal{C}))$.

Portanto, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são homogêneas, então $\mathcal{A} \odot \mathcal{C}$ é homogênea.

Finalmente, se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{C}_1$ são multiplicações de $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{C}_0$ por uma $\mathcal{H}$ (em ω), respectivamente, então queremos definir uma multiplicação de $\mathcal{A}_0 \odot \mathcal{C}_0$ por $\mathcal{H}$, a partir das famílias $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{C}_1$, mas que não será a própria família $\mathcal{A}_1 \odot \mathcal{C}_1$.

Teorema 3.19. *Se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{C}_1$ são multiplicações de $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{C}_0$ por uma $\mathcal{H}$ (em ω), respectivamente, então $(\mathcal{A}_1 \sqcup_a [T]^{\leq 1}) \odot (\mathcal{C}_1 \sqcup_c \mathcal{C}_1 \sqcup_c \mathcal{C}_1 \sqcup_c \mathcal{C}_1 \sqcup_c \mathcal{C}_1)$ é uma multiplicação $\mathcal{A}_0 \odot \mathcal{C}_0$ por $\mathcal{H}$.*

Elementos da demonstração. O lema anterior, ou lemas similares, garantirão essencialmente a propriedade (a) da multiplicação. Para garantir a propriedade (b) da multiplicação, fazemos uma profunda análise combinatória e provamos o que pode ser visto como uma versão estrutural (e complexa) do Lema do Δ-sistema. $\square$

Elementos da demonstração do Teorema 3.16. Para mostrar que (a) implica (b), a ideia é mostrar que se $\mathfrak{B}$ é uma base de famílias homogêneas em cadeias de T, então as coleções

$$\mathfrak{B}_a = \{\mathcal{F}_a : \mathcal{F} \in \mathfrak{B}\}, \text{ onde } \mathcal{F}_a = \{s \in \mathcal{F} : s \text{ é uma cadeia em } (T, <_a)\}$$

e

$$\mathfrak{B}_c = \{\mathcal{F}_c : \mathcal{F} \in \mathfrak{B}\},\ \text{onde}\ \mathcal{F}_c = \{s \in \mathcal{F} : s \text{ é uma cadeia em } (T, <_c)\}$$

são bases de famílias homogêneas em cadeias de $(T, <_a)$ e $(T, <_c)$, respectivamente.

Por outro lado, para mostrar que (b) implica (a), dadas duas bases $\mathfrak{B}_a$ e $\mathfrak{B}_c$ de famílias homogêneas em cadeias de $(T, <_a)$ e $(T, <_c)$, respectivamente, a ideia é considerar uma coleção $\mathfrak{B}$ de famílias que contém as famílias da forma $\mathcal{A} \odot \mathcal{C}$, onde $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}_a$ e $\mathcal{C} \in \mathfrak{B}_c$ e usamos os resultados enunciados nesta seção para provar que é uma base. □

3.5 Demonstração do resultado principal

Teorema 3.20. *Se T é uma árvore especial κ-Aronszajn e existem bases de famílias homogêneas em cadeias de λ para todo $\lambda < \kappa$, então existem bases de famílias homogêneas em cadeias de $(T, <_a)$ and $(T, <_c)$. Daí, segue do Teorema 3.16 que existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de T (e, portanto em κ).*

Elementos da demonstração. Uma árvore especial κ-Aronszajn é uma árvore $(T, <_c)$ de altura κ, sem ramos cofinais, cujos níveis têm tamanho menor que κ e existe uma função $f : T \to T$ satisfazendo:

(1) $f(t) < t$ para $t \in T$ (exceto a raiz);

(2) para qualquer $t \in T$, $f^{-1}(\{t\})$ é a união de menos que κ anticadeias.

Daí, observe que como os ramos e níveis têm comprimento menor que κ, temos bases de famílias homogêneas em cadeias de cada ramo e de cada nível. Usando a função f, é possível mesclar as famílias destas bases de maneira coerente, obtendo bases de famílias homogêneas em cadeias de toda a árvore T, com relação às duas ordens parciais $<_a$ e $<_c$. Finalmente usamos o Teorema 3.16 para garantir a existência de uma base de famílias homogêneas em cadeias de T e, portanto, de κ. □

Finalmente, podemos esboçar a demonstração do resultado principal deste capítulo, que segue linhas análogas à demonstração do Corolário 3.15, com o uso dos resultados enunciados nesta seção.

Elementos da demonstração do Teorema 3.9. Seja κ infinito e menor que o primeiro cardinal de Mahlo. Se $\kappa = \omega$, o Teorema 3.6 garante a existência de uma base de famílias homogêneas em cadeias. Senão, suponhamos que o resultado vale para todo cardinal menor que κ.

Se κ não é um limite forte, por definição temos que existe $\lambda < \kappa$ tal que $\kappa \leq 2^\lambda$. Daí, pela hipótese indutiva existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de λ e, pelo Corolário 3.14, segue que existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ.

Se κ é um cardinal regular e limite forte mas não é Mahlo, um resultado de Todorcevic [57] garante que existe uma árvore especial κ-Aronszajn. Logo, pelo Teorema 3.20, existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ.

Finalmente, no caso em que κ é singular, lemas com versões simplificadas dos Teoremas 3.11 e 3.16 garantem que podemos mesclar bases em cardinais menores para obter uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ. $\square$

A principal pergunta que nos parece interessante agora é determinar o cardinal

$$\mathfrak{ns} = \min\{\kappa : \begin{array}{l}\text{todo espaço de Banach de densidade} \geq \kappa \\ \text{possui uma sequência subsimétrica}\}\end{array}$$

e sua versão para espaços reflexivos

$$\mathfrak{ns}_{refl} = \min\{\kappa : \begin{array}{l}\text{todo espaço de Banach reflexivo de densidade} \geq \kappa \\ \text{possui uma sequência subsimétrica}\}\end{array}$$

Combinando nosso resultado com o de Ketonen [37], sabemos que ambos estão entre o primeiro cardinal de Mahlo e o primeiro cardinal ω-Erdös.

Outra abordagem possível como continuação de nossa pesquisa é a classificação combinatória dos cardinais κ para os quais existe uma família α-homogênea em cadeias de κ para todo $\omega \leq \alpha < \omega_1$ ou para os quais existe uma base de famílias homogêneas em cadeias de κ. Esta questão é inspirada pelo resultado de Lopez-Abad e Todorcevic [43] mencionado no início deste capítulo, em que classificam os cardinais κ tais quais existe uma família hereditária, compacta e grande em κ como os cardinais ω-Erdös.

O uso de famílias de conjuntos finitos na construção de espaços de Banach interessantes é um tema com muitas aplicações possíveis. Um projeto conjunto com J. Lopez-Abad é mostrar a existência de famílias de conjuntos finitos em ω_1 que nos auxiliem na construção de uma versão não separável do espaço de Bourgain e Delbaen [9], ou seja, um pré-dual de $\ell_1(\omega_1)$ com a propriedade de Radon-Nikodym.

Referências Bibliográficas

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, New York, 2006.

[2] P. Alexandroff, *Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume*, Math. Ann. **92** (1924), no. 3-4, 294–301.

[3] S. A. Argyros and R. Haydon, *A hereditarily indecomposable L_∞-space that solves the scalar-plus-compact problem*, Acta Math. **206** (2011), no. 1, 1–54.

[4] S. A. Argyros and P. Motakis, *α-large families and applications to Banach space theory*, Topol. Appl. **172** (2014), no. 1, 47–67.

[5] M. Bačák and P. Hájek, *Mazur intersection property for Asplund spaces*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 8, 2090–2094.

[6] S. Banach, *Théorie des óperations linéaires*, Chelsea Publishing Co., New York, 1955.

[7] J. E. Baumgartner, *Almost-disjoint sets, the dense set problem and the partition calculus*, Ann. Math. Logic **9** (1976), no. 4, 401–439.

[8] M. Bell, *Universal uniform Eberlein compact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 7, 2191–2197.

[9] J. Bourgain and F. Delbaen, *A class of special $\mathcal{L}_\infty$ spaces*, Acta Math. **145** (1980), no. 3-4, 155–176.

[10] C. Brech, *Aspectos combinatórios da geometria de espaços de Banach $C(K)$ com a propriedade de Grothendieck*, Master's thesis, Universidade de São Paulo, 2004.

[11] ———, *Construções genéricas de espaços de Asplund $C(K)$*, Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo/Université de Paris 7 - Denis Diderot, 2008.

[12] C. Brech and P. Koszmider, *On biorthogonal systems whose functionals are finitely supported*, Fund. Math. **213** (2011), no. 1, 43–66.

[13] ______, *Thin-very tall compact scattered spaces which are hereditarily separable*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 1, 521–543.

[14] ______, *On universal Banach spaces of density continuum*, Israel J. Math. **190** (2012), 93–110.

[15] ______, *On universal spaces for the class of Banach spaces whose dual balls are uniform Eberlein compacts*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 4, 1267–1280.

[16] ______, *ℓ_∞-sums and the Banach space ℓ_∞/c_0*, Fund. Math. **224** (2014), no. 2, 175–185.

[17] ______, *An isometrically universal Banach space induced by a non-universal Boolean algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 5, 2029–2036.

[18] C. Brech, J. Lopez-Abad, and S. Todorcevic, *Homogeneous families on trees and subsymmetric basic sequences*, preprint.

[19] C. Brech and S. Todorcevic, *Existence of biorthogonal systems under the P-ideal dichotomy*, em preparação.

[20] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 1143–1148.

[21] ______, *The independence of the continuum hypothesis. II*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **51** (1964), 105–110.

[22] A. Dow, *Saturated Boolean algebras and their Stone spaces*, Topology Appl. **21** (1985), no. 2, 193–207.

[23] A. Dow and K. P. Hart, *A universal continuum of weight $\aleph$*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 5, 1819–1838.

[24] Alan Dow, *PFA and complemented subspaces of ℓ_∞/c_0*, J. Log. Anal. **8** (2016), Paper No. 2, 19.

[25] L. Drewnowski and J. W. Roberts, *On the primariness of the Banach space l_∞/C_0*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), no. 4, 949–957.

[26] M. Džamonja, *Isomorphic universality and the number of pairwise nonisomorphic models in the class of banach spaces*, Abst. Appl. Anal. (2014), no. 2014, 1–11.

[27] M. Džamonja and I. Juhász, *CH, a problem of Rolewicz and bidiscrete systems*, Topol. Appl. **165** (2014), no. 11, 2485–2494.

[28] R. Engelking, *General topology*, second ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Polish by the author.

[29] M. Fabian, G. Godefroy, and V. Zizler, *The structure of uniformly Gâteaux smooth Banach spaces*, Israel J. Math. **124** (2001), no. 1-2, 243–252.

[30] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, and V. Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8, Springer-Verlag, New York, 2001.

[31] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, *Banach space theory*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, New York, 2011, The basis for linear and nonlinear analysis.

[32] D. H. Fremlin and P. J. Nyikos, *Saturating ultrafilters on* $\mathbb{N}$, J. Symbolic Logic **54** (1989), no. 3, 708–718.

[33] W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 4, 851–874.

[34] P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Vanderwerff, and V. Zizler, *Biorthogonal systems in Banach spaces*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 26, Springer, New York, 2008.

[35] T. Jech, *Set theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, The third millennium edition, revised and expanded.

[36] I. Juhász and L. Soukup, *How to force a countably tight, initially* ω_1*-compact and noncompact space?*, Topology Appl. **69** (1996), no. 3, 227–250.

[37] J. Ketonen, *Banach spaces and large cardinals*, Fund. Math. **81** (1974), 291–303, Collection of articles dedicated to Andrzej Mostowski on the occasion of his sixtieth birthday, IV.

[38] P. Koszmider, *Some topological invariants and biorthogonal systems in Banach spaces*, Extracta Math. **26** (2011), no. 2, 271–294.

[39] ______, *Universal objects and associations between classes of banach spaces and classes of compact spaces*, Sbornik Radova **17** (2015), no. 25, 93–115.

[40] K. Kunen, *Inaccessibility properties of cardinals*, Ph.D. thesis, Stanford University, 1968.

[41] ______, *Set theory. an introduction to independence proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 102, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[42] I. E. Leonard and J. H. M. Whitfield, *A classical Banach space: l_∞/c_0*, Rocky Mountain J. Math. **13** (1983), no. 3, 531–539.

[43] J. Lopez-Abad and S. Todorcevic, *Positional graphs and conditional structure of weakly null sequences*, Adv. Math. **242** (2013), 163–186.

[44] S. Negrepontis, *Banach spaces and topology*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 1045–1142.

[45] E. Odell, *A nonseparable Banach space not containing a subsymmetric basic sequence*, Israel J. Math. **52** (1985), no. 1-2, 97–109.

[46] A. J. Ostaszewski, *A countably compact, first-countable, hereditarily separable regular space which is not completely regular*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **23** (1975), no. 4, 431–435.

[47] I. I. Parovičenko, *On a universal bicompactum of weight* $\aleph$, Dokl. Akad. Nauk SSSR **150** (1963), 36–39.

[48] M. Rabus, *An ω_2-minimal Boolean algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), no. 8, 3235–3244.

[49] D. Raghavan and S. Todorcevic, *Combinatorial dichotomies and cardinal invariants*, Math. Res. Lett. **21** (2014), no. 2, 379–401.

[50] J. Schreier, *Ein gegenbeispiel zur theorie der schwachen konvergenz*, Studia Math. (1930), no. 2, 58–62.

[51] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions. Vol. I*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1971, Monografie Matematyczne, Tom 55.

[52] S. Shelah and A. Usvyatsov, *Banach spaces and groups—order properties and universal models*, Israel J. Math. **152** (2006), 245–270.

[53] W. Szlenk, *The nonexistence of the separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces*, Studia Math. **30** (1968), 53–61.

[54] S. Todorcevic, *Partition problems in topology*, Contemporary Mathematics, vol. 84, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

[55] ______, *Some applications of S and L combinatorics*, The work of Mary Ellen Rudin (Madison, WI, 1991), Ann. New York Acad. Sci., vol. 705, New York Acad. Sci., New York, 1993, pp. 130–167.

[56] ______, *Biorthogonal systems and quotient spaces via Baire category methods*, Math. Ann. **335** (2006), no. 3, 687–715.

[57] ______, *Walks on ordinals and their characteristics*, Progress in Mathematics, vol. 263, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[58] ______, *Combinatorial dichotomies in set theory*, Bull. Symbolic Logic **17** (2011), no. 1, 1–72.

[59] B.S. Tsirelson, *Not every banach space contains l_p or c_0*, Funct. Anal. Appl. (1974), no. 8, 138–141.

Índice Remissivo

2^ω, 5
$C(K)$, 7
$Fn_{<\kappa}(\lambda, \mu)$, 5
N-bifurcante, 11
X^Y, 3
$[\kappa]^{<\lambda}$, 3
$[\kappa]^{\leq\lambda}$, 3
Δ-sistema, 3
$\beta\mathbb{N}$, 6
δ_x, 7
κ-cc, 4
$\mathfrak{b}$, 15
$\mathfrak{c}$, 3
ω, 3
ω^*, 6
ω_1, 3
ω_2, 3
σ-fechado, 4
ε-biortogonal, 15
$\wp(X)$, 6
$\wp(\mathbb{N})/Fin$, 6
álgebra de Boole, 5
    universal, 18
árvore
    binária, 38
    de Aronszajn, 42

amalgamação, 4
anticadeia, 4
Aronszajn, 42
Asplund, 16
axiomática de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, 4

balanceada, 12
base de famílias, 35
base de Markushevich, 9
biortogonal, 9

cardinal
    do contínuo, 3
    inacessível, 39
    limite forte, 32
    regular, 3
    singular, 3
ccc, 4
CH, 4
compactificado de Stone-Čech de $\mathbb{N}$, 6
compacto de Eberlein uniforme, 27
compatíveis, 4
conjunto de Cantor, 5
    N-bifurcado, 12
conjunto de Cantor N-bifurcado, 12
consistente, 4
contínuo, 3

densidade, 5
dicotomia do P-ideal, 14
disperso, 5
dual, 7
dualidade de Stone, 6

espaço
  de Banach isometricamente universal, 18
  compacto de Eberlein uniforme, 27
  compacto universal, 18
  da forma $C(K)$, 7
  de Asplund, 16
  de Banach universal, 18
  de Schreier, 30
  de Stone, 6
  de Tsirelson, 31
  dual, 7

família
  N-bifurcante, 11
  spreading, 34
  balanceada, 12
  compacta, 33
  de Schreier, 30
  hereditária, 33
  homogênea, 34
  uniforme, 33

hereditária, 33
hipótese do contínuo, 4
homogênea, 34

inacessível, 39
independente, 4
isometria, 7
isometricamente universal, 18
isomorfismo, 7

limite forte, 32

Markushevich, 9
metrizável, 5
modelo *spreading*, 32
multiplicação de famílias, 35

P-ideal, 14
peso, 5
PID, 14

reflexivo, 7
regular, 3
resíduo de $\beta\mathbb{N}$, 6

Schreier, 30
semibiortogonal, 10
separável, 5
sequência subsimétrica, 30
singular, 3
sistema
  ε-biortogonal, 15
  biortogonal, 9
  semibiortogonal, 10
subsimétrica, 30

topologia
  fraca, 7
  fraca*, 7
Tsirelson, 31

uniforme, 33
universal, 18

zero-dimensional, 5
ZFC, 4