USP - IME
MAP 2210 - Aplicações de Álgebra Linear

Lista 3

Enviar a resolução por email até **sexta-feira 06/04**

BMAC bruna.cassol@hotmail.com
BMAP lucasarenstein@usp.br

Entregar por email somente os exercícios 1, 2 e 3. Os exercícios 4 , 5 e 6 são extras, não são para entregar.

1) Encontre diretamente a decomposição LU da matriz A onde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

Para isso resolva as equações encontrando u_{11}, u_{12}, l_{21} e u_{22} respectivamente.
A generalização deste procedimento para matrizes n x n é conhecida como método de Crout.

2a) Cálcule a fatoração PLU da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix}$$

2b) Utilize as matrizes P, L e U do exercício anterior para resolver Ax=b onde:

$$b = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3) Mostre que a matriz A abaixo não tem fatoração LU, mas que possui fatoração PLU.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios Extras

Definição Menor Principal: Dado $A \in R^{nxn}$, denotamos por $A_k \in R^{kxk}; k = 1, 2, ..., n$ o k-ésimo menor principal de A, dado por:

$$[A_k] = [A_{ij}] \ , \ 1 \leq i, j \leq k$$

Exemplo: Seja A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

O primeiro menor principal é: $A_1 = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$, o segundo menor principal é: $A_2 = A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Teorema: Seja $A \in R^{nxn}$ e $A_k \in R^{kxk}; k = 1, 2, ..., n$ o k-ésimo menor principal de A.

• Se $detA_k \neq 0, k = 1, ..., n-1 \Rightarrow A$ possui fatoração LU
• Se a fatoração LU existe e $detA = detA_n \neq 0$ Então a fatoração LU é única

4) Utilizando o teorema acima determine se as matrizes abaixo possuem fatoração LU e nesse caso se é única ou não.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

5) Determine todos os valores de a para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Não possui fatoração LU.

6) Encontre a fatoração PLU da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 17 \\ 3 & 6 & -12 & 3 \\ 2 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$