UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO - USP

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME

# *Notas de Aula da Disciplina*
# *MAT6651 - Operadores Diferenciais em Variedades Riemannianas*

José Nazareno Vieira Gomes - DM - ICE - UFAM

Sob a supervisão de Antônio Luiz Pereira - IME - USP

São Paulo, SP

2015

# Conteúdo

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo vamos exibir algumas definições, resultados e exemplos da teoria básica de geometria Riemanniana, os quais serão utilizados no decorrer deste curso. Mais especificamente, vamos relembrar os conceitos de variedades diferenciáveis, campos de vetores tangentes, métricas e conexões. Para maiores detalhes recomendamos ao leitor as referências [12, 26, 28].

Nestas notas utilizamos a *convenção de Einstein da soma*, segundo a qual estará implícita uma soma sempre que houver índices repetidos e em posições invertidas.

## 1.1 Variedades Diferenciáveis

**Definição 1.1.** *Dizemos que um conjunto $M$ é uma variedade diferenciável (Hausdorff e com base enumerável) $n$-dimensional se existir uma família de aplicações diferenciáveis e injetivas $\boldsymbol{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos $U_\alpha$ de $\mathbb{R}^n$ em $M$, tais que:*

*(i)* $M = \bigcup_\alpha \boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha)$;

*(ii) Para todo par $\alpha, \beta$, com $\boldsymbol{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \boldsymbol{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\boldsymbol{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\boldsymbol{x}_\beta^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\alpha$ e $\boldsymbol{x}_\alpha^{-1} \circ \boldsymbol{x}_\beta$ são diferenciáveis;*

*(ii) A família $\{(U_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha)\}$ é máxima em relação as condições (i) e (ii).*

Dado $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, a aplicação $\mathbf{x}_\alpha$ ou o par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ é uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de $M$ em $p$ e $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ uma vizinhança coordenada em $p$. Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$

satisfazendo $(i)$ e $(ii)$ é uma estrutura diferenciável em $M$. Denotaremos apenas por $M^n$ uma variedade diferenciável $M$ de dimensão $n$.

**Observação 1.1.** $(a)$ *$M$ ser Hausdorff significa que quaisquer dois pontos de $M$ têm vizinhanças disjuntas;* $(b)$ *Dizemos que $M$ possui base enumerável para sua topologia se $M$ pode ser coberto por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas.*

**Definição 1.2.** *Sejam $M^m$ e $N^n$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $\boldsymbol{y} : V \subset \mathbb{R}^n \to N$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ em $p$ tal que $\varphi(\boldsymbol{x}(U)) \subset \boldsymbol{y}(V)$ e a aplicação $\boldsymbol{y}^{-1} \circ \varphi \circ \boldsymbol{x} : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $\boldsymbol{x}^{-1}(p)$. Dizemos que $\varphi$ é diferenciável em um aberto de $M$ se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

Decorre da condição $(ii)$ da Definição 1.1 que a Definição 1.2 independe da escolha das parametrizações $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

**Definição 1.3.** *Um difeomorfismo entre duas variedades diferenciáveis $M$ e $N$ é uma aplicação $\varphi : M \to N$ diferenciável com inversa diferenciável. Neste sentido, $\varphi$ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças $U$ de $p$ e $V$ de $\varphi(p)$ tais que $\varphi : U \to V$ é um difeomorfismo.*

**Definição 1.4.** *Diz-se que uma variedade diferenciável $M$ é orientável se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ tal que:*

*(i) Para todo par $\alpha, \beta$, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que $M$ é não-orientável. Se $M$ é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo a condição $(i)$ é uma orientação para $M$. Duas estruturas diferenciáveis satisfazendo a condição $(i)$ determinam a mesma orientação se a união delas ainda satisfaz a condição $(i)$.

**Definição 1.5.** *Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ de um intervalo aberto $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ sobre uma variedade diferenciável $M$, é uma curva diferenciável em $M$. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em $M$. O vetor tangente à curva $\alpha$ em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Um vetor tangente em $p$ é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a $M$ em $p$ com as operações usuais de funções é um espaço vetorial $n$-dimensional que é denotado por $T_pM$.

Escolhendo uma parametrização $\mathbf{x} : U \to M^n$ em $p = \mathbf{x}(0)$ as representantes locais da função $f \in C^\infty(M)$ e da curva $\alpha$ nesta parametrização são respectivamente

$$\widetilde{f}(q) = f \circ \mathbf{x}(q), \quad q = (x_1, \ldots, x_n) \in U \quad \text{e} \quad \widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Restringindo $f$ a $\alpha$ e notando que $f \circ \alpha = \tilde{f} \circ \tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} \alpha'(0)f &= \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d(\tilde{f} \circ \tilde{\alpha})}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\widetilde{f}(x_1(t), \ldots, x_n(t))\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\Big(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}\Big)_0 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)_0\Big)(\widetilde{f}). \end{aligned}$$

Logo, a expressão local de $\alpha'(0)$ em termos da parametrização $\mathbf{x}$ é:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0.$$

Note que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 \in T_pM$, pois é o vetor tangente em $p$ à curva coordenada $x_i \mapsto \mathbf{x}(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$. O fato de $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ ser linearmente independente juntamente com a expressão local de $\alpha'(0)$, prova que o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ forma uma base coordenada para $T_pM$. O espaço vetorial $T_pM$ é o espaço tangente de $M$ em $p$.

**Proposição 1.1.** *Seja $\varphi : M^m \to N^n$ uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis $M$ e $N$. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ dada por $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de $\alpha$. Esta aplicação é a diferencial de $\varphi$ em $p$.*

*Demonstração.* Sejam $\mathbf{x} : U \to M$ e $\mathbf{y} : V \to N$ parametrizações em $p$ e $\varphi(p)$, respectivamente. A expressão local de $\varphi$ é dada por:

$$\widetilde{\varphi}(q) = \mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x}(q) = (y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m))$$
$$q = (x_1, \ldots, x_m) \in U \text{ e } (y_1, \ldots, y_n) \in V$$

Por outro lado, a expressão local de $\alpha$ é dada por:

$$\widetilde{\alpha}(t) = \mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)).$$

Portanto,

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \beta(t) = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\alpha}(t) = (y_1(x_1(t), \ldots, x_m(t)), \ldots, y_n(x_1(t), \ldots, x_m(t))).$$

Assim a expressão de $\beta'(0)$ na base $\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\right\}$ de $T_{\varphi(p)}N$ é dada por:

$$\beta'(0) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i}\Big|_q x_i'(0), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_n}{\partial x_i}\Big|_q x_i'(0)\Big), \; q = \mathbf{x}^{-1}(p).$$

Isto mostra que $\beta'(0)$ não depende da escolha de $\alpha$. E também podemos escrever

$$\begin{aligned} d\varphi_p(v) &= \beta'(0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m}\Big|_q \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_m}\Big|_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1}\Big|_q & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}\Big|_q & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_m}\Big|_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(0) \\ x_2'(0) \\ \vdots \\ x_n'(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Portanto, $d\varphi_p$ é uma aplicação linear de $T_pM$ em $T_{\varphi(p)}N$ cuja matriz nas bases associadas às parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é precisamente a matriz $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

**Definição 1.6** (Fibrado tangente)**.** *Seja $M^n$ uma variedade diferenciável. O fibrado tangente de $M$ é a união disjunta de todos os espaços tangentes. Formalmente,*

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

O conjunto $TM$ definido acima tem uma estrutura diferenciável, ver por exemplo [12]. Agora faz sentido considerarmos a seguinte aplicação entre variedades diferenciáveis como segue. Seja $X : M \to TM$ uma aplicação diferenciável que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Para esclarecermos a diferenciabilidade de $X$ no sentido da Definição 1.2, convém considerarmos uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ para então escrevermos para cada $p \in \mathbf{x}(U)$,

$$X(p) = a^i(p)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a^i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em $U$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a $\mathbf{x}$, $i = 1, \ldots, n$. Isso permite afirmarmos que $X$ é diferenciável se, e só se, as funções $a^i$ são diferenciáveis para alguma (e portanto para qualquer) parametrização. Assim podemos considerar $X$ como um operador atuando em funções $f \in C^\infty(M)$ do seguinte modo

$$(Xf)(p) = X(p)(f) = a^i(p)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(p)$$

onde $\tilde{f} = f \circ \mathbf{x}$ é a expressão local de $f$ na parametrização $\mathbf{x}$. Sendo assim, $X$ é diferenciável se, e só se, $Xf \in C^\infty(M)$ para toda $f \in C^\infty(M)$. Vamos nos referir a aplicação $X$ como um campo de vetores em $M$ e denotaremos $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe $C^\infty$. Neste contexto, é importante observar que cada campo de vetores é uma aplicação $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $\mathbb{R}$-linear, tal que $X(fh) = fXh + hXf$, para toda $f, h \in C^\infty(M)$.

**Definição 1.7.** *Sejam $X$ e $Y$ campos de vetores em $\mathfrak{X}(M)$. Definimos o colchete de Lie dos campos $X$ e $Y$, denotado por $[X, Y]$ como*

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf), \ f \in C^\infty(M)$$

A partir de agora escreveremos por simplicidade $\partial_i$ para indicar os campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}$ associados a um sistema de coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$. Observemos que o colchete de Lie dos campos de vetores coordenados é:

$$[\partial_i, \partial_j]\, f = \partial_i\,(\partial_j f) - \partial_j\,(\partial_i f) = 0$$

**Proposição 1.2.** *Sejam $X$ e $Y$ campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável $M$ e sejam $X = a^i\partial_i$ e $Y = b^j\partial_j$ as expressões de $X$ e $Y$ associadas a um sistema de coordenadas locais $x : U \to M$. Então existe um único campo de vetores $[X, Y]$, dado pela Definição 1.7, cuja expressão em coordenadas locais é:*

$$[X, Y] = \left(a^i\partial_i b^j - b^i\partial_i a^j\right)\partial_j \tag{1.1}$$

*Demonstração.* Para todo $f \in C^\infty(M)$, temos

$$X(Yf) = a^i\partial_i(b^j\partial_j f) = a^i\partial_i b^j\partial_j f + a^i b^j\partial_i\partial_j f.$$

Analogamente,

$$Y(Xf) = b^i\partial_i(a^j\partial_j f) = b^i\partial_i a^j\partial_j f + b^i a^j\partial_i\partial_j f.$$

Trocando $i$ por $j$ e $j$ por $i$ na segunda parcela da equação anterior e usando o fato que $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$, teremos

$$[X, Y]f = \left(a^i\partial_i b^j - b^i\partial_i a^j\right)\partial_j f. \tag{1.2}$$

Isso mostra a unicidade local de $[X, Y]$ e portanto podemos defini-lo globalmente, bastando considerar suas expressões locais como em (1.2). Consequentemente, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$. $\square$

É imediato da definição acima as propriedade seguintes do colchete de Lie.

**Proposição 1.3.** *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$, então:*

$(a)$ *Bilinearidade:*
$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$

$(b)$ *Anticomutatividade:*
$[X, Y] = -[Y, X]$

$(c)$ *Identidade de Jacobi:*
$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$

$(d)$ $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

**Definição 1.8.** *Chamaremos de semi-espaço $\mathbb{H}^n$ ao conjunto dado por*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0\}.$$

Um subconjunto aberto $V$ no semi-espaço $\mathbb{H}^n$ tem a forma $V = U \cap \mathbb{H}^n$, onde $U$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.

Diremos que uma função $f : V \to \mathbb{R}$, definida em um aberto $V$ de $\mathbb{H}^n$ é diferenciável se existir uma função diferenciável $\overline{f} : U \to \mathbb{R}$ de um aberto $U \supset V$ de $\mathbb{R}^n$, tal que a restrição de $\overline{f}$ a $V$ seja igual a $f$. Se $f$ é diferenciável em $V$ a diferencial $df_p$ é definida por $df_p = d\overline{f}_p$.

Uma definição que generaliza a Definição 1.1 é a de variedade com bordo. Sua definição é praticamente a mesma das variedades sem bordo com a diferença que as parametrizações têm como domínios conjuntos abertos em semi-espaços do espaço Euclidiano, isto é:

**Definição 1.9.** *Uma variedade diferenciável de dimensão $n$ com bordo é um conjunto $M$ e uma família de aplicações $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{H}^n \to M$ de abertos $U_\alpha$ de $\mathbb{H}^n$ em $M$ tais que*

*(i)* $\bigcup_\alpha (U_\alpha) = M$;

*(ii) Para todo par $\alpha, \beta$, com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{H}^n$ e as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ e $f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$ são diferenciáveis.*

**Definição 1.10.** *Um ponto $p \in M$ é dito ponto de bordo de $M$ se para um sistema de coordenadas $f : U \to M$ em torno de $p$ se tem $f(0, x_2, \ldots, x_n) = p$. O conjunto dos pontos de bordo de $M$, é chamado o bordo de $M$ e indicado por $\partial M$.*

Além disso, é possível provar que a definição de ponto de bordo independe do sistema de coordenadas e que o bordo de uma variedade diferenciável de dimensão $n$ com $\partial M \neq \emptyset$ é uma variedade diferenciável (sem bordo) de dimensão $n - 1$. Para mais detalhes consultar [13].

As definições de diferenciabilidade de funções, plano tangente, orientabilidade, etc., para variedades com bordo são introduzidas de maneira inteiramente análoga às correspondentes definições para variedades diferenciáveis (sem bordo).

**Definição 1.11.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável. O suporte de uma função $f : M \to \mathbb{R}$, denotado por supp($f$), é o fecho do conjunto dos pontos onde $f$ não se anula, isto é,*

$$supp(f) = \overline{\{p \in M; f(p) \neq 0\}}.$$

*Se supp($f$) é compacto, dizemos que $f$ tem suporte compacto.*

Diz-se que uma cobertura $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de uma variedade diferenciável $M$ é localmente finita se qualquer ponto $p \in M$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos da cobertura $\mathcal{X}$. Em particular, $p$ pertence somente a um número finito de conjuntos de $\mathcal{X}$.

**Definição 1.12.** *Seja $M$ uma variedade diferenciável e $\mathcal{X} = \{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ uma cobertura aberta de $M$. Uma partição diferenciável da unidade com relação a $\mathcal{X}$ é uma família de funções diferenciáveis $\{f_\alpha : M \to \mathbb{R}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ tais que, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$,*

1. *Para todo $\alpha$, $f_\alpha \geq 0$.*

2. *Para todo $\alpha$, supp $(f_\alpha) \subset X_\alpha$.*

3. *Cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança na qual apenas um número finito de funções $f_\alpha$ são diferentes de $0$.*

4. $\displaystyle\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(p) = 1, \forall p \in M.$

*Note que as condições 3 e 4 garantem que a coleção $\{supp\ (f_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ é localmente finita. Costuma-se dizer que a partição diferenciável da unidade $\{f_\alpha\}$ está subordinada à cobertura $\mathcal{X}$.*

**Teorema 1.1.** *Uma variedade diferenciável $M$ possui uma partição diferenciável da unidade se, e só se, toda componente conexa de $M$ é de Hausdorff e tem base enumerável.*

*Demonstração.* Ver [10] ou [38]. $\square$

## 1.2 Métrica Riemanniana

**Definição 1.13.** *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável $M$ é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ (uma forma bilinear, simétrica, positiva definida) no espaço tangente $T_pM$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Considere um sistema de coordenadas locais $(U, \boldsymbol{x})$ e sejam $X, Y \in T_pM$. Temos que,*

$$g(X,Y) \;=\; \langle X, Y\rangle = \langle a^i\partial_i, b^j\partial_j\rangle = a^ib^j\langle\partial_i,\partial_j\rangle.$$

*Portanto, dizer que a métrica varia diferenciavelmente é dizer que as funções coordenadas $g_{ij} : U \to \mathbb{R}$, dada por $g_{ij} = \langle\partial_i,\partial_j\rangle$, são funções diferenciáveis em $U$. Uma variedade diferenciável $M$ com uma dada métrica Riemanniana $g$ chama-se variedade Riemanniana $(M, g)$.*

Utilizando a partição da unidade podemos ver que toda variedade diferenciável $M$ possui uma métrica Riemanniana. De fato, seja $\{f_\alpha\}$ uma partição diferenciável da unidade de $M$ subordinada a cobertura $\{X_\alpha\}$ de $M$ por vizinhanças coordenadas. Logo, podemos definir uma métrica Riemanniana $\langle,\rangle^\alpha$ em cada $X_\alpha$: a induzida pelo sistema de coordenadas, isto é, considere uma métrica no aberto da respectiva parametrização e defina $\langle,\rangle^\alpha$ induzida pela diferencial desta parametrização. Façamos então

$$\langle u, v\rangle_p = f_\alpha(p)\langle u, v\rangle_p^\alpha \tag{1.3}$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$. A verificação da simetria, bilinearidade e diferenciabilidade são imediatas. Agora, se $u \in T_pM$ é um vetor não nulo, então $\langle u, u\rangle = f_\alpha(p)\langle u, u\rangle_p^\alpha$ é uma soma não-negativa, pois cada termo é não-negativo. Além disso, cada $\langle u, u\rangle_p^\alpha > 0$ e uma das funções $f_\alpha$ é estritamente positiva (pois a soma delas é um), portanto $\langle u, u\rangle > 0$, o que mostra a positividade. Assim (1.3) define uma métrica Riemanniana em $M$.

**Definição 1.14** (Isometria)**.** *Um difeomorfismo $F : M \to N$ entre duas variedades diferenciáveis é uma isometria se*

$$\langle u, v\rangle = \langle dF_p(u), dF_p(v)\rangle, \forall p \in M \text{ e } u, v \in T_pM.$$

**Definição 1.15** (Isometria Local)**.** *Dizemos que a aplicação diferenciável $F : M \to N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de $p$ tal que $F : U \to F(U)$ é um difeomorfismo de acordo com a definição anterior.*

## 1.3 Conexão Riemanniana

**Definição 1.16.** *Uma conexão de Levi-Civita (ou Riemanniana) $\nabla$ em uma variedade Riemanniana é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

*definida por $\nabla(X, Y) := \nabla_X Y$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

*(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ($C^\infty(M)$-linear na primeira variável)*

*(2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ($\mathbb{R}$-linear na segunda variável)*

*(3) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ (regra de Leibniz)*

*(4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (simetria)*

*(5) $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$ (compatibilidade com a métrica)*

*onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$.*

Uma correspondência em uma variedade diferenciável que satisfaça as três primeiras propriedades é chamada *conexão afim*.

Para provar a existência de uma *conexão afim*, consideremos dois campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e um sistema de coordenadas locais $(U, \mathbf{x})$ em torno de um ponto $p \in M$, de modo que $X = a^i\partial_i$ e $Y = b^j\partial_j$. Utilizando as propriedades da *conexão afim*, deve ocorrer

$$\nabla_X Y = \nabla_{a^i\partial_i} b^j\partial_j = a^i\nabla_{\partial_i} b^j\partial_j = a^i(\partial_i b^j\partial_j + b^j\nabla_{\partial_i}\partial_j).$$

Para cada $i, j$ escolhemos $n$-funções $\Gamma_{ij}^1, \ldots, \Gamma_{ij}^n$ diferenciáveis em $U$ para definirmos $\nabla_{\partial_i}\partial_j := \Gamma_{ij}^k \partial_k$, logo

$$\nabla_X Y = a^i(\partial_i b^j \partial_j + b^j \Gamma_{ij}^k \partial_k) = (a^i \partial_i b^k + a^i b^j \Gamma_{ij}^k)\partial_k = (X(b^k) + a^i b^j \Gamma_{ij}^k)\partial_k. \tag{1.4}$$

Isso mostra que $\nabla_X Y$ só depende de $a_i(p), b_k(p)$, das derivadas $X(b_k)$ e da escolha de funções $\Gamma_{ij}^k$. Em outra palavras, se $\alpha : I \to M$ é uma curva diferenciável tal que $\alpha'(0) = X_p$, then $\nabla_X Y$ depende apenas dos valores de $Y$ ao longo de $\alpha$, isto é, se $Y \circ \alpha = Z \circ \alpha$, então $\nabla_{\alpha'} Y = \nabla_{\alpha'} Z$. Portanto, podemos definir a *conexão afim* localmente como em (1.4), que é única fixada as funções $\Gamma_{ij}^k$, donde podemos defini-la globalmente em $M$.

Observe que a primeira parcela da conexão é exatamente a derivada direcional do $\mathbb{R}^n$, enquanto que a segunda se destaca pelo aparecimento das funções $\Gamma_{ij}^k$ que são os símbolos de Christoffel da conexão.

**Teorema 1.2.** *Em uma variedade Riemanniana $(M, g)$ existe uma única conexão Riemanniana $\nabla$.*

*Demonstração.* Provaremos inicialmente a unicidade. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Suponha que exista uma conexão Riemanniana $\nabla$. Utilizando a equação de compatibilidade, obtemos:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \\ Y\langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

A simetria de $\nabla$ no último termo de cada uma das igualdades acima, permite reescrevê-las como

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle \tag{1}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_X Y\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle \tag{2}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle \tag{3}$$

Somando (1) e (2) e subtraindo (3), obtemos:

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle Z, [Y, X]\rangle - \langle X, [Z, Y]\rangle.$$

Portanto,

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle Z, [Y, X]\rangle + \langle X, [Z, Y]\rangle. \tag{1.5}$$

Logo, se existem duas conexões Riemaniannas $\nabla^1$ e $\nabla^2$, elas devem ser dadas por (1.5), donde $\langle \nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y, Z\rangle = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Como a métrica é uma forma bilinear não-degenerada, $\nabla^1_X Y = \nabla^2_X Y$, para todo $X$ e $Y$, o que implica $\nabla^1 = \nabla^2$.

Para provar a existência, basta observar que o lado direito de (1.5) só depende da métrica e dos valores de $X, Y$ e $Z$, logo podemos definir $\nabla$ por esta equação. É imediato verificar que $\nabla$, assim definida, satisfaz as propriedades desejadas. $\square$

A equação (1.5) é conhecida como fórmula de Koszul.

Em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$, temos para todo $i, j = 1, \ldots, n$

$$(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\partial_k = \nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_j}\partial_i = [\partial_i, \partial_j] \overset{(1.1)}{=} 0. \tag{1.6}$$

Isto equivale a $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, o que justifica o nome simetria no item (*4*) da Definição 1.16. Além disso, aplicando a fórmula de Koszul aos campos de vetores coordenados, obtemos:

$$2\langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_l\rangle = \partial_i\langle \partial_j, \partial_l\rangle + \partial_j\langle \partial_l, \partial_i\rangle - \partial_l\langle \partial_i, \partial_j\rangle.$$

Reescrevendo, temos

$$\Gamma^m_{ij} g_{ml} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}).$$

Como a matriz $(g_{ij})$ é positiva definida, segue que ela admite uma inversa $(g^{ij})$. Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $g^{lk}$, e observando que $g_{ml}g^{lk} = \delta^k_m$, encontramos explicitamente

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) \tag{1.7}$$

que é a expressão para os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em um sistema de coordenadas qualquer.

Alternativamente, podemos obter a conexão Riemanniana, bastando definir uma conexão afim por meio da expressão em (1.7), esta por sua vez está unicamente determinada e cumpre as propriedades desejadas.

**Definição 1.17.** *Sejam $M^n$ uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $U$ uma vizinhançaa de $p$ em $M$ onde é possível definir campos $\partial_1, \ldots, \partial_n \in \mathfrak{X}(U)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{\partial_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, formam uma base de $T_qM$, dizemos que $\{\partial_i\}$ é um referencial móvel. Se o conjunto de campos $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ formam uma base ortonormal de $T_qM$ para cada $q \in U$, dizemos que $\{\partial_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, é um referencial ortonormal.*

# Capítulo 2

# Tensores em Variedades Riemannianas

Para um maior aprofundamento dos assuntos que abordaremos neste capítulo recomendamos ao leitor as referências [26, 32, 38].

**Definição 2.1.** *Um $(1, r)$-tensor em uma variedade diferenciável $M$ é uma aplicação*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{(r)} \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

*multilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em $M$. Enquanto que, num $(0, r)$-tensor, o contradomínio é $C^\infty(M)$. Formalmente,*

$$T(Y_1, \ldots, fX + hY, \ldots, Y_r) = fT(Y_1, \ldots, X, \ldots, Y_r) + hT(Y_1, \ldots, Y, \ldots, Y_r)$$

*para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, h \in C^\infty(M)$.*

O valor do campo $T(Y_1, \ldots, Y_r)$ (ou da função no caso de $(0, r)$-tensores) num ponto $p \in M$ depende unicamente dos valores dos campos de vetores $Y_1, \ldots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$ no ponto $p$. Isto é, se $Z_1, \ldots, Z_r \in \mathfrak{X}(M)$ são tais que $Y_j(p) = Z_j(p)$ $(1 \leq j \leq r)$. Então

$$T(Y_1, \ldots, Y_r)(p) = T(Z_1, \ldots, Z_r)(p).$$

Com efeito, para provar este fato, primeiramente vamos considerar campos $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(M)$ e supor que para algum $j$, $X_j(p) = 0$. Em uma vizinhança coordenada $U$ de $p$, temos $X_j = a^i \partial_i$. Seja $\psi$ uma função bump em $p$, com $supp\, \psi \subset U$ e $\psi(p) = 1$. Assim, a função $\psi a^i \in C^\infty(M)$ e o campo de vetores $\psi \partial_i \in \mathfrak{X}(M)$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\psi^2 T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_r) = T(X_1, \ldots, \psi^2 X_j, \ldots, X_r) &= T(X_1, \ldots, \psi a^i \psi \partial_i, \ldots, X_r) \\ &= \psi a^i T(X_1, \ldots, \psi \partial_i, \ldots, X_r).\end{aligned}$$

Como cada $a^i(p) = 0$ e $\psi(p) = 1$, segue que $T(X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_r)(p) = 0$. Agora por hipótese $Y_j(p) = Z_j(p)$ para todo $j$, isso vai implicar pelo fato anterior e pela multilinearidade de $T$ que

$$T(Y_1, \ldots, Y_r)(p) - T(Z_1, \ldots, Z_r)(p) = 0,$$

conforme havíamos afirmado. A este fato vamos nos referir como o *caráter pontual* dos tensores.

**Exemplo 2.1.** *O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que faz corresponder a cada ponto $p \in M$ e a cada par $X, Y \in T_pM$, o produto interno de $X$ e $Y$ na métrica Riemanniana de $M$, isto é, $g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_p$, é um $(0, 2)$-tensor e suas componentes no referencial $\{\partial_i\}$ são os coeficientes $g_{ij}$ da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

**Exemplo 2.2.** *Toda $k$-forma diferencial $\omega$ em $M$ é automaticamente um $(0, k)$-tensor em $M$.*

**Observação 2.1.** *Em uma variedade Riemanniana a métrica Riemanniana faz corresponder a cada campo diferenciável $X \in \mathfrak{X}(M)$ a 1-forma diferencial $\omega_X \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por*

$$\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \text{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

*É imediato que $\omega_X$ está unicamente determinada. Neste sentido, temos um $(0, 1)$-tensor $X^\flat : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, dado por*

$$X^\flat(Y) = \langle X, Y \rangle, \quad \text{para todo} \quad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Também será conveniente considerarmos o isomorfismo musical $^\sharp : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$, ou seja, a inversa da aplicação canônica $^\flat : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ que associa cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ ao seu dual $X^\flat$.

Mais geralmente, dado um $(0, r)$-tensor $T$ em uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$, podemos identificá-lo com um $(1, r-1)$-tensor $\widetilde{T}$ mediante a métrica Riemanniana $\langle , \rangle$, fazendo

$$\langle \widetilde{T}(Y_1, \ldots, Y_{r-1}), Y_r \rangle := T(Y_1, \ldots, Y_r). \tag{2.1}$$

Por simplicidade de notação, e desde que não teremos perigo de confusão, omitiremos o "$\sim$" no $(1, r-1)$-tensor correspondente ao $(0, r)$-tensor $T$. Em particular, o tensor métrico $g$, será identificado com o $(1, 1)$-tensor identidade $I$ em $\mathfrak{X}(M)$.

Em uma variedade diferenciável é possível estender a noção de derivada covariante a tensores como veremos agora.

**Definição 2.2.** *A derivada covariante de um $(1,r)$-tensor $T$ é um $(1,r+1)$-tensor $\nabla T$ dado por*

$$\nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r) = \nabla_X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T(\nabla_X Y_1, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, \nabla_X Y_r) \tag{2.2}$$

*Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante $\nabla_X T$ de $T$ em relação a $X$ como um tensor de mesma ordem que $T$ dado por*

$$\nabla_X T(Y_1, \ldots Y_r) := \nabla T(X, Y_1, \ldots, Y_r).$$

Analogamente a derivada covariante de um $(0,r)$-tensor $T$ é um $(0,r+1)$-tensor $\nabla T$ dado por (2.2).

**Observação 2.2.** *Dizemos que um tensor é paralelo quando $\nabla T \equiv 0$.*

**Exemplo 2.3.** *Em uma variedade Riemanniana $(M,g)$ com a conexão de Levi-Civita $\nabla$, temos que $\nabla g \equiv 0$. (A derivada covariante do tensor métrico é o tensor nulo). Com efeito, dados $Y_1, Y_2, X \in \mathfrak{X}(M)$, teremos*

$$\begin{aligned}
\nabla g(X, Y_1, Y_2) &= (\nabla_X g)(Y_1, Y_2) \\
&= \nabla_X(g(Y_1, Y_2)) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) \\
&= g(\nabla_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla_X Y_2) - g(\nabla_X Y_1, Y_2) - g(Y_1, \nabla_X Y_2) = 0
\end{aligned}$$

**Exemplo 2.4.** *Utilizando a Observação 2.1, a derivada covariante de $\omega_X$ em relação ao campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z \omega_X)(Y) &= Z(\omega_X(Y)) - \omega_X(\nabla_Z Y) = Z\langle X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\
&= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\
&= \langle \nabla_Z X, Y\rangle = \langle \nabla X(Z), Y\rangle.
\end{aligned}$$

*Decorre daí que $\nabla_Z \omega_X$ pode ser identificado ao campo $\nabla_Z X$, ou equivalentemente, $\nabla \omega_X$ pode ser identificado ao operador $\nabla X$. Isto mostra que a derivada covariante de tensores é uma generalização da derivação covariante de campos (derivar um campo é o mesmo que derivar covariantemente o seu dual).*

**Definição 2.3.** *Seja $T$ um $(1,1)$-tensor. Define-se a derivada covariante de segunda ordem $\nabla^2 T = \nabla\nabla T$ como o $(1,3)$-tensor, dado por*

$$\nabla^2 T(X, Y, Z) = (\nabla_X \nabla_Y T)(Z) - (\nabla_{\nabla_X Y} T)(Z).$$

*Isso se justifica pelos cálculos seguintes:*

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla T(X,Y,Z) &= (\nabla_X \nabla T)(Y,Z) \\
&= \nabla_X \nabla T(Y,Z) - \nabla T(\nabla_X Y, Z) - \nabla T(Y, \nabla_X Z) \\
&= \nabla_X \nabla_Y T(Z) - \nabla_X T(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} T(Z) + T(\nabla_{\nabla_X Y} Z) \\
&\quad -\nabla_Y T(\nabla_X Z) + T(\nabla_Y \nabla_X Z).
\end{aligned}$$

*Reagrupando as duas primeiras parcelas com as duas últimas, temos*

$$\begin{aligned}
\nabla\nabla T(X,Y,Z) &= \{\nabla_X \nabla_Y T(Z) - \nabla_X T(\nabla_Y Z) - \nabla_Y T(\nabla_X Z) + T(\nabla_Y \nabla_X Z)\} \\
&\quad -\{\nabla_{\nabla_X Y} T(Z) - T(\nabla_{\nabla_X Y} Z)\} \\
&= \{\nabla_X (\nabla_Y T)(Z) - (\nabla_Y T)(\nabla_X Z)\} - \{\nabla_{\nabla_X Y} T(Z) - T(\nabla_{\nabla_X Y} Z)\} \\
&= (\nabla_X \nabla_Y T)(Z) - (\nabla_{\nabla_X Y} T)(Z),
\end{aligned}$$

*que está de acordo com a definição.*

*Para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, define-se a derivada covariante de segunda ordem $\nabla^2_{X,Y} T$ em relação a $X, Y$ como um tensor de mesma ordem que $T$, dado por*

$$\nabla^2_{X,Y} T(Z) := \nabla^2 T(X,Y,Z).$$

Novamente, observamos que quando $T$ é um $(0,1)$-tensor, o processo descrito da Definição 2.3 até aqui, é análogo.

Motivados pelo resultado do Exemplo 2.4, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, convém considerar o $(1,1)$-tensor $\nabla Z : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por $\nabla Z(X) = \nabla_X Z$. Assim, pela Definição 2.2, teremos o $(1,2)$-tensor dado por

$$\begin{aligned}
\nabla^2_{X,Y} Z &:= \nabla\nabla Z(X,Y) \\
&= \nabla_X(\nabla Z(Y)) - (\nabla Z)(\nabla_X Y) \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z, \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Analogamente,

$$\nabla^2_{Y,X} Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_Y X} Z. \qquad (2.4)$$

Subtraindo (2.4) de (2.3) obtemos, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, o $(1,2)$-tensor dado por

$$\nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \qquad (2.5)$$

Fazendo $Z$ variar na equação (2.5) obteremos um $(1,3)$-tensor, bastando provar a linearidade em $Z$. O que motiva a definição seguinte.

**Definição 2.4.** *Seja $M$ uma variedade Riemanniana. O tensor curvatura de Riemann é o $(1,3)$-tensor*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

*dado por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2.6}$$

Observemos que a notação $R(X,Y,Z)$ também é adequada para este tensor. Além disso, alertamos que alguns autores costumam considerar o tensor curvatura com um sinal trocado de (2.6). Neste caso as definições que dependem do sinal deste tensor devem ser trocadas de acordo com a definição escolhida, tomando por referência que a curvatura seccional (cf. Def. 2.5 à frente) da esfera canônica unitária seja 1.

**Exemplo 2.5.** *Seja $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. De fato, seja $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, então $\nabla_X Z = (Xz_1, \ldots, Xz_n)$ e $\nabla_Y Z = (Yz_1, \ldots, Yz_n)$. Logo,*

$$\nabla_X \nabla_Y Z = (XYz_1, \ldots, XYz_n), \ \ \nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \ldots, YXz_n)$$

*e*

$$\nabla_{[X,Y]} Z = ([X,Y]z_1, \ldots, [X,Y]z_n).$$

*Portanto, $R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = 0$.*

Usando o tensor métrico podemos definir o tensor curvatura como sendo o $(0,4)$-tensor

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

dado por

$$R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W \rangle$$

**Proposição 2.1.** *O tensor curvatura de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W) = R(Y,X,W,Z)$.

2. $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$.

3. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(primeira identidade de Bianchi).*

*4.* $(\nabla_X R)(Y,Z,W) + (\nabla_Y R)(Z,X,W) + (\nabla_Z R)(X,Y,W) = 0$ *(segunda identidade de Bianchi).*

Observemos que no item 4, às vezes, será mais conveniente que o tensor curvatura seja considerado com a notação $R(X,Y,Z)$. Mas, independentemente disto, sempre teremos o $(1,4)$-tensor $(\nabla_X R)(Y,Z,W) = \nabla R(X,Y,Z,W)$.

Dizemos que um referencial ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $i,j = 1,\ldots,n$.

Para uso posterior vamos estabelecer as seguintes notações:

$$R(e_i,e_j,e_k) = R_{ijk} \;\text{ e }\; \nabla_{e_i} = \nabla_i.$$

Deste modo, vamos escrever $X = a^j e_j$, onde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é um referencial geodésico em $p \in M$, para observar que o caráter pontual de $\nabla e_i$ nos permite deduzir que, em $p$,

$$(\nabla e_i)(X) = (\nabla_X e_i) = a^j(\nabla_{e_j} e_i) = 0.$$

Assim podemos reescrever (em $p$) a segunda indentidade de Bianchi, como segue

$$\nabla_i R_{jkl} + \nabla_j R_{kil} + \nabla_k R_{ijl} = 0.$$

Às vezes, também será conveniente reescrever o tensor curvatura $R$ na bem adequada notação seguinte:

$$R(X,Y,Z) = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Então, para um referencial geodésico $\{e_1,\ldots,e_n\}$ em um ponto $p \in M$, temos para todos $i,j,k,l = 1,\ldots,n$ (em $p$)

$$R_{jkl} = R(e_j,e_k)e_l = [\nabla_j,\nabla_k]e_l$$

e

$$\begin{aligned}[\nabla_i, R(e_j,e_k)]e_l := \nabla_i R(e_j,e_k)e_l - R(e_j,e_k)\nabla_i e_l = \nabla_i R_{jkl} &= [\nabla_i, \nabla_j\nabla_k - \nabla_k\nabla_j]e_l \\ &= [\nabla_i,[\nabla_j,\nabla_k]]e_l.\end{aligned}$$

Além disso, vamos observar que Identidade de Jacobi ainda é válida na forma

$$[[\nabla_X,\nabla_Y],\nabla_Z] + [[\nabla_Y,\nabla_Z],\nabla_X] + [[\nabla_Z,\nabla_X],\nabla_Y] = 0.$$

Alertamos que estas observações serão de extrema importância para a prova do item 4 da proposição anterior.

***Demonstração da Proposição 2.1***. A primeira parte de 1 segue diretamente da definição de $R$. Para provarmos a segunda parte, note que a linearidade nas duas últimas parcelas, nos permite afirmar que segunda igualdade é equivalente a $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$, uma vez que podemos usar a identidade de polarização em $Z$ para obter o resultado desejado, deste modo vamos calcular

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z,Z\rangle &= \langle \nabla_X\nabla_Y Z,Z\rangle - \langle \nabla_Y\nabla_X Z,Z\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]}Z,Z\rangle \\
&= X\langle \nabla_Y Z,Z\rangle - \langle \nabla_Y Z,\nabla_X Z\rangle - Y\langle \nabla_X Z,Z\rangle + \langle \nabla_X Z,\nabla_Y Z\rangle \\
&\quad -\frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}X(Y\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2}Y(X\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle - \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Agora vamos provar 3, para isso usamos a definição para escrevermos

$$\begin{aligned}
& R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\
=\ & \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\
& +\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
=\ & \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
& -\nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y.
\end{aligned}$$

Em seguida, usamos a simetria da conexão e a identidade de Jacobi para campos de vetores como segue:

$$\begin{aligned}
& R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\
=\ & \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y \\
=\ & [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.
\end{aligned}$$

O item 2 é uma consequência puramente algébrica de 1 e 3, vejamos:

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,W) &= -R(Y,Z,X,W) - R(Z,X,Y,W) \\
&= R(Y,Z,W,X) + R(Z,X,W,Y) \\
&= -R(Z,W,Y,X) - R(W,Y,Z,X) - R(X,W,Z,Y) - R(W,Z,X,Y) \\
&= 2R(Z,W,X,Y) + R(W,Y,X,Z) + R(X,W,Y,Z) \\
&= 2R(Z,W,X,Y) - R(Y,X,W,Z).
\end{aligned}$$

Assim, $R(Z, W, X, Y) = R(Y, X, W, Z)$.

Para a prova de 4, basta considerar um referencial geodésico $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um ponto $p \in M$. Neste caso, para todos $i, j, k, l = 1, \dots, n$, temos (em $p$)

$$(\nabla_i R)(e_j, e_k, e_l) = \nabla_i R_{jkl} = [\nabla_i, R(e_j, e_k)]e_l = [\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]]e_l.$$

Então,

$$\begin{aligned} \nabla_i R_{jkl} + \nabla_j R_{kil} + \nabla_k R_{ijl} &= [\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]]e_l + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]]e_l + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]]e_l \\ &= \big([\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]] + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]] + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]]\big)e_l = 0. \end{aligned}$$

$\square$

A partir do tensor curvatura definiremos os seguintes entes geométricos:

**Definição 2.5.** *A curvatura seccional $K_p(\sigma)$ no ponto $p \in M$ segundo um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, é definida por*

$$K_p(\sigma) = \frac{\langle R(x, y)y, x\rangle}{|x \wedge y|^2},$$

*onde $x, y \in \sigma$ são vetores linearmente independentes e $|x \wedge y|^2 = |x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2$. Convém considerarmos também a notação $K_p(x, y) = K_p(\sigma)$.*

Segue-se da Álgebra linear que esta definição não depende da escolha dos vetores $x, y$ que geram $\sigma$. Além disso, note que, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_pM$, temos

$$K_{ij} := K(e_i, e_j) = \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle = R(e_i, e_j, e_j, e_i) =: R_{ijji}.$$

Fixemos um vetor $v \in T_pM$, de modo que $\{v, e_1, \dots, e_{n-1}\}$ seja uma base ortonormal de $T_pM$. Vamos considerar todas as possíveis curvaturas seccionais dos planos que podemos gerar com $v$ e tomar a média

$$Ric_p(v) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} K_p(v, e_i).$$

Esta é a que chamaremos de curvatura de Ricci no ponto $p$ segundo $v$. Deste modo, podemos novamente considerar a base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_pM$, para calcularmos a média

$$s := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Ric_p(e_j) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j} K_p(e_j, e_i).$$

Associado a estas funções curvaturas temos.

**Definição 2.6.** *Definimos o tensor de Ricci como o traço do tensor curvatura de Riemann. Isto é, se* $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_pM$ *é uma base ortonormal e* $u, v \in T_pM$*, então para cada* $p \in M$ *o tensor de Ricci é dado por*

$$Ric(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,u)v, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,v)u, e_i \rangle = Ric(v,u),$$

*onde a segunda igualdade segue da Proposição 2.1 e prova que o tensor de Ricci é simétrico.*

Retornando à base ortonormal $\{v, e_1, \ldots, e_{n-1}\} \subset T_pM$, vamos deduzir que

$$Ric(v,v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i,v)v, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, v) = (n-1)Ric(v). \tag{2.7}$$

Tomando o traço na equação (2.7), obtemos

$$S := \sum_{j=1}^{n} Ric(e_j, e_j) = (n-1)\sum_{j=1}^{n} Ric(e_j) = n(n-1)s,$$

isto é,

$$\frac{S}{n(n-1)} = s.$$

Por isso, chamaremos $S$ de curvatura escalar, enquanto que $s$ será chamada de curvatura escalar normalizada.

Recordemos agora o seguinte fato sobre EDO: *Seja* $X$ *um campo diferenciável de vetores em* $M$*. Dado* $p \in M$*, existe uma vizinhança* $U \subset M$ *de* $p$*, um intervalo* $(-\varepsilon, \varepsilon)$*,* $\varepsilon > 0$*, e uma aplicação diferenciável* $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ *tais que a curva* $t \mapsto \varphi(t,q)$*, é a única curva diferenciável satisfazendo* $\frac{\partial \varphi(t,q)}{\partial t} = X_{\varphi(t,q)}$ *e* $\varphi(0,q) = q$*, para todo* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ *e* $q \in U$*.*

Observemos que este resultado é apenas uma extensão para $M^n$ do teorema fundamental de existência, unicidade e dependência das condições iniciais das equações diferenciais ordinárias. De fato, basta observar o caráter local deste último, juntamente com o difeomorfismo local de $M^n$ com $\mathbb{R}^n$.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ o fluxo de $X$. Consideremos, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, o difeomorfismo $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$. A derivada de Lie de $Y$ com respeito a $X$ é o campo de vetores que a cada $p \in M$ associa ao vetor tangente dado por

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\varphi_t^{-1} Y_{\varphi(t,p)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[d\varphi_t^{-1} Y_{\varphi(t,p)} - Y_p\right]. \tag{2.8}$$

Como $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ e $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = i_d$, temos a seguinte equivalência com a definição (2.8)

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} d\varphi_{-t}\big[(Y_{\varphi_t(p)} - d\varphi_t Y)\big] = \lim_{t\to 0} d\varphi_{-t}\big[\frac{1}{t}(Y_{\varphi_t(p)} - d\varphi_t Y)\big] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big[Y_{\varphi_t(p)} - d\varphi_t Y\big].$$

Na última igualdade utilizamos que $\lim\limits_{t\to 0} d\varphi_{-t} = i_d$. Este fato segue da definição de vetor tangente e da dependência contínua de $\varphi(t,q)$ com relação a $t$ e $q$.

**Fato 2.1.** *Para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vale a igualdade:*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Este fato mostra que o campo de vetores $[X, Y]$ também pode ser interpretado como uma derivação de $Y$ ao longo das trajetórias de $X$. Para prová-lo, convém alertarmos para o seguinte resultado.

**Fato 2.2.** *Sejam $U$ um aberto de $M$, $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, tal que $\psi(0,p) = 0$, para todo $p \in U$. Então, existe uma função diferenciável $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbb{R}$, satisfazendo*

$$\psi(t,p) = th(t,p) \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = h(0,p) \tag{2.9}$$

*Demonstração.*

$$h(t,p) := \int_0^1 \frac{\partial \psi(st,p)}{\partial (st)} ds \quad \Rightarrow \quad th(t,p) = \int_0^1 \frac{\partial \psi(st,p)}{\partial (st)} d(st) = \psi(t,p).$$

□

**Fato 2.3.** *Sejam $\varphi : M \to M$ um difeomorfismo, $p \in M$ e $f$ uma função diferenciável em uma vizinhança de $\varphi(p)$. Então para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ vale a regra da cadeia*

$$(d\varphi_p X_p)_{\varphi(p)}(f) = X_p(f \circ \varphi)$$

*Demonstração.* Seja $\alpha$ uma curva diferenciável em $M$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X_p$. Pela definição apresentada na Proposição 1.1, temos

$$(d\varphi_p X_p)_{\varphi(p)}(f) := (\varphi \circ \alpha)'(0)(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \varphi \circ \alpha) = X_p(f \circ \varphi).$$

□

*Demonstração do Fato 2.1.* Para cada $f \in C^\infty(M)$, consideremos a seguinte função diferenciável $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to \mathbb{R}$, dada por $\psi(t,p) = f \circ \varphi(t,p) - f(p)$. Note que $\psi(0,p) = 0$ para todo $p \in U$, então pelo Fato 2.2, existe $h$ satisfazendo (2.9) e como $\frac{\partial \varphi(t,p)}{\partial t} = X_{\varphi(t,p)}$, teremos

$$f \circ \varphi_t(p) = f(p) + th(t,p) \quad \text{e} \quad X_p(f) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}(f \circ \varphi) = h(0,p).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y)_p(f) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big[(d\varphi_{-t} Y_{\varphi_t(p)})(f) - Y_p(f)\big] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big[Y_{\varphi_t(p)}(f \circ \varphi_{-t}) - Y_p(f)\big] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big[Y_{\varphi_t(p)}(f - th) - Y_p(f)\big] \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big[Y_{\varphi_t(p)}(f) - Y_p(f)\big] - \lim_{t \to 0} Y_{\varphi_t(p)}(h).
\end{aligned}$$

Agora basta usar a definição de vetor tangente para concluir que

$$(\mathcal{L}_X Y)_p(f) = X_p(Y_p(f)) - Y_p(X_p(f)).$$

$\square$

A derivada de Lie pode ser estendida para tensores. Para tanto, vamos focar nossa atenção para os $(0,r)$-tensores $T$. Os resultados para os $(1,r)$-tensores são análogos.

Novamente vamos considerar um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$, o seu fluxo $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$, e para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, o difeomorfismo $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ dado por $\varphi_t(q) = \varphi(t,q)$. A derivada de Lie de $T$ com respeito a $X$ é o $(0,r)$-tensor $\mathcal{L}_X T$ que a cada $p \in M$ associa ao operador dado por

$$(\mathcal{L}_X T)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^* T)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big[\varphi_t^* T_{\varphi(t,p)} - T_p\big].$$

Para o caso de funções $f \in C^\infty(M)$, devemos interpretá-las como 0-tensores, de modo que $\varphi_t^* f = f \circ \varphi$ implica

$$(\mathcal{L}_X f)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_t^* f)(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \varphi_t(p)).$$

Ademais, é válida a seguinte propriedade da derivada de Lie para um $(0,r)$-tensor $T$ em $M$

$$(\mathcal{L}_X T)(Y_1, \ldots, Y_r) = X(T(Y_1, \ldots, Y_r)) - T([X, Y_1], Y_2, \ldots, Y_r) - \ldots - T(Y_1, \ldots, Y_{r-1}, [X, Y_r]).$$

Por simplicidade, façamos a prova deste fato para um $(0,2)$-tensor $T$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X T)_p(Y,Z) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big[\varphi_t^* T_{\varphi(t,p)}(Y,Z) - T_p(Y,Z)\big]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big[T_{\varphi_t(p)}(d\varphi_t Y, d\varphi_t Z) - T_p(Y,Z)\big]\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big[T_{\varphi_t(p)}\big(d\varphi_t Y - Y_{\varphi_t(p)} + Y_{\varphi_t(p)}\,,\, d\varphi_t Z - Z_{\varphi_t(p)} + Z_{\varphi_t(p)}\big) - T_p(Y,Z)\big].
\end{aligned}$$

Pela bilinearidade de $T$,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X T)_p(Y,Z) &= \lim_{t\to 0} T_{\varphi_t(p)}\big(\frac{1}{t}(d\varphi_t Y - Y_{\varphi_t(p)}), d\varphi_t Z - Z_{\varphi_t(p)}\big)\\
&\quad + \lim_{t\to 0} T_{\varphi_t(p)}\big(\frac{1}{t}(d\varphi_t Y - Y_{\varphi_t(p)}), Z_{\varphi_t(p)}\big)\\
&\quad + \lim_{t\to 0} T_{\varphi_t(p)}\big(Y_{\varphi_t(p)}, \frac{1}{t}(d\varphi_t Z - Z_{\varphi_t(p)})\big)\\
&\quad + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big[T_{\varphi_t(p)}(Y_{\varphi_t(p)}, Z_{\varphi_t(p)}) - T_p(Y,Z)\big]\\
&= -T_p([X,Y],Z) - T_p(Y,[X,Z]) + X(T(Y,Z)).
\end{aligned}$$

Em particular:

(i) Para um $(0,2)$-tensor métrico $g$ em $M$

$$(\mathcal{L}_X g)(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y). \tag{2.10}$$

(ii) Para o $(0,1)$-tensor dado pela diferencial $df$ de uma função $f \in C^\infty(M)$

$$\mathcal{L}_X df = d\mathcal{L}_X f.$$

Relembremos que a diferencial exterior $d\omega$ de qualquer 1-forma diferencial $\omega$ em $M$ é dada por

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]). \tag{2.11}$$

Portanto, a Fórmula de Koszul (1.5) da conexão Riemanniana de $(M,g)$ pode ser reescrita como uma equação entre os $(0,2)$-tensores:

$$2\nabla Y = d\omega_Y + \mathcal{L}_Y g.$$

Para maiores detalhes sobre derivada de Lie recomendamos o livro de John Lee [26].

## 2.1 Operadores Diferenciais

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais (gradiente, laplaciano, etc.) de uso frequente no $\mathbb{R}^n$. Passaremos a uma exposição de alguns destes operadores. Em tudo que segue, $(M, \langle , \rangle)$ denotará uma variedade Riemanniana de dimensão $n$ com métrica $\langle , \rangle$ e conexão de Levi-Civita $\nabla$.

Relembremos que um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ em um aberto $U \subset M$ é geodésico em $p \in U$ se $(\nabla_{e_i} e_j)(p) = 0$ para todos $1 \leq i, j \leq n$.

**Definição 2.7.** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O gradiente de $f$ é o campo vetorial diferenciável $\nabla f$, definido sobre $M$ por*

$$\langle \nabla f, X \rangle = \nabla_X f = X(f) = df(X) \tag{2.12}$$

*para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.*

Relembremos que todo campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito localmente em termos dos campos coordenados $\partial_1, \dots, \partial_n$ como segue:

$$Y = g^{ij} y_i \partial_j,$$

em que $y_i := \langle Y, \partial_i \rangle$. De fato, primeiro escreva $Y = a^k \partial_k$, em seguida note que $\langle Y, \partial_j \rangle = a^k g_{kj}$ implica $a^i = g^{ij} \langle Y, \partial_j \rangle$. Em particular, escrevendo $f_j := \langle \nabla f, \partial_j \rangle = \partial_j f$, a expressão local para o campo de vetores gradiente é:

$$\nabla f = g^{ij} f_j \partial_i. \tag{2.13}$$

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal local. Então, $f_i = e_i(f)$ e

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i. \tag{2.14}$$

Além disso, é imediato das propriedades de derivação, que para $f, h \in C^\infty(M)$, vale:

$$\nabla(f + h) = \nabla f + \nabla h \quad \text{e} \quad \nabla(fh) = h \nabla f + f \nabla h.$$

**Definição 2.8.** *Seja $X$ um campo de vetores diferenciável em $M$. A divergência de $X$ é a função diferenciável* $\mathrm{div} X : M \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$\mathrm{div} X(p) = \mathrm{tr}\{v \mapsto \nabla_v X(p)\}, \tag{2.15}$$

*onde* tr *denota o traço do operador linear $v \in T_pM \mapsto \nabla_v X(p)$.*

Seja $X$ um campo diferenciável em $M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança aberta $U \subset M$. Se $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ em $U$, então

$$\operatorname{div}X(p) = \sum_{i=1}^{n}(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X\rangle). \tag{2.16}$$

Em particular, se o referencial for geodésico em $p \in U$, temos que

$$\operatorname{div}X(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i(a_i). \tag{2.17}$$

De fato,

$$\operatorname{div}X = \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}X, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}(e_i\langle X, e_i\rangle - \langle X, \nabla_{e_i}e_i\rangle) = \sum_{i=1}^{n}(e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i}e_i, X\rangle),$$

o que prova nossa afirmação. Além disso, uma conta direta, prova que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f : M \to \mathbb{R}$, vale:

$$\operatorname{div}(X+Y) = \operatorname{div}X + \operatorname{div}Y \quad \text{e} \quad \operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}X + \langle \nabla f, X\rangle.$$

**Definição 2.9.** *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O laplaciano de $f$ é a função $\Delta f : M^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\Delta f = \operatorname{div}\nabla f. \tag{2.18}$$

Sendo assim, para $f, h \in C^\infty(M)$, tem-se

$$\begin{aligned}\Delta(fh) &= \operatorname{div}(\nabla(fh)) = \operatorname{div}(h\nabla f) + \operatorname{div}(f\nabla h)\\ &= h\operatorname{div}\nabla f + \langle \nabla h, \nabla f\rangle + f\operatorname{div}\nabla h + \langle \nabla f, \nabla h\rangle\\ &= h\Delta f + f\Delta h + 2\langle \nabla f, \nabla h\rangle. \end{aligned} \tag{2.19}$$

**Definição 2.10.** *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos o hessiano de $f$ como o $(1,1)$-tensor, dado por*

$$(\nabla^2 f)(X) = \nabla_X \nabla f, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.20}$$

*Ou como $(0,2)$-tensor, dado por*

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = \nabla^2_{X,Y}(f). \tag{2.21}$$

A última igualdade em (2.21) é motivada pela definição apresentada na equação (2.4) e do fato a seguir:

$$\begin{aligned}\langle(\nabla^2 f)(X), Y\rangle &= \langle\nabla_X\nabla f, Y\rangle = X\langle\nabla f, Y\rangle - \langle\nabla f, \nabla_X Y\rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) = \nabla^2_{X,Y}(f).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Além disso, também teremos

$$\langle(\nabla^2 f)(Y), X\rangle = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) = \nabla^2_{Y,X}(f). \tag{2.23}$$

Subtraindo (2.23) de (2.22) obtemos

$$\nabla^2_{X,Y}(f) = \langle(\nabla^2 f)(X), Y\rangle = \langle(\nabla^2 f)(Y), X\rangle = \nabla^2_{Y,X}(f),$$

ou seja, "*o* $(0,2)$*-tensor* $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ *é simétrico*". Ademais, é imediato de (2.20) que para cada $p \in M$, vale

$$\mathrm{tr}\{v \mapsto (\nabla^2 f)(v)(p)\} = \mathrm{div}\nabla f(p) = \Delta f(p). \tag{2.24}$$

Outros três fatos importantes são:

$$\begin{aligned}\nabla df &= \nabla^2 f, \\ R(X,Y)\nabla f &= (\nabla_X \nabla^2 f)(Y) - (\nabla_Y \nabla^2 f)(X), \\ \mathcal{L}_{\nabla f} g &= 2\nabla^2 f.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Os dois primeiros seguem imediatamente da definição de derivada covariante de tensores e da definição do operador hessiano, enquanto que o terceiro é imediato da equação (2.10).

Finalizando esta secção, afirmamos que uma conta direta prova a próxima equação

$$\frac{1}{2} d|\nabla f|^2 = \nabla^2 f(\nabla f, \cdot). \tag{2.26}$$

### 2.1.1 Orientação e o Teorema da Divergência

Sejam $M^n$ uma variedade Riemanniana orientável, $v_i \in T_pM$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal positiva de $T_pM$. A $n$-forma diferencial $w$ definida em cada ponto $p \in M$ por

$$w_p(v_1, \ldots, v_n) = det(\langle v_i, e_j\rangle) = \text{ volume orientado } \{v_1, \ldots, v_n\}, \tag{2.27}$$

é chamada o elemento de volume (ou forma volume) de $M$, o qual também denotaremos por $dM$. É imediato que $w$ está bem definida, isto é, $w_p(v_1, \ldots, v_n)$ não depende da base ortonormal positiva escolhida.

Suponha agora que $M$ é uma variedade com bordo $\partial M$. Denotamos por $\nu$ o campo unitário normal exterior a $M$ ao longo de $\partial M$. A orientação de $M$ induz uma orientação em $\partial M$ como segue: dado $p \in \partial M$ e dada uma base $\beta = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\} \subset T_p\partial M$, dizemos que $\beta$ é positiva se $\{\nu, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ é uma base positiva de $T_pM$.

**Definição 2.11.** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. O produto interior de uma $k$-forma $\omega$ na direção de $X$ é a $(k-1)$-forma $\iota_X\omega$ definida através da seguinte regra:*

$$(\iota_X\omega)_p(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega_p(X_p, v_1, \ldots, v_{k-1}) \tag{2.28}$$

*para todo $p \in M$ e $v_1, \ldots, v_{k-1} \in T_pM$. Também denotamos $\iota_X\omega$ por $X \lrcorner \omega$.*

Por exemplo, se $w$ é a forma volume de $M$ e $\nu$ o normal unitário exterior a $M$ ao longo de $\partial M$, segue de (2.27) que $\nu \lrcorner w$ é a forma volume de $\partial M$ induzida por $M$.

**Proposição 2.2.** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana orientada, com elemento de volume $dM$. Então*

$$d(X \lrcorner dM) = (\mathrm{div} X)dM \tag{2.29}$$

*para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$*

*Demonstração.* ver [13] □

Precisaremos da seguinte versão do teorema da divergência:

**Teorema 2.1.** *Seja $M^n$ uma variedade Riemanniana compacta orientada e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se o bordo de $M$ é munido com a orientação e a métrica induzidas por $M$ e $\nu$ denota o normal unitário exterior a $M$ ao longo de $\partial M$, então*

$$\int_M (\mathrm{div} X)dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d(\partial M)$$

*Demonstração.* Segue da Proposição 2.2 e do teorema de Stokes, ver por exemplo [26], que

$$\begin{aligned} \int_M \mathrm{div} X \, dM &= \int_M d(X \lrcorner dM) = \int_{\partial M} X \lrcorner dM = \int_{\partial M} (X^\top + X^\perp) \lrcorner dM \\ &= \int_{\partial M} (\langle X, \nu \rangle \nu) \lrcorner dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \nu \lrcorner dM = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, d(\partial M). \end{aligned}$$

□

Note que no caso de $\nu$ ser o normal unitário interior a $M$ ao longo de $\partial M$, o segundo membro da igualdade no Teorema 2.1 muda de sinal.

As fórmulas da proposição a seguir são conhecidas como as *identidades de Green.*

**Proposição 2.3.** *Sejam $f, h : M \to \mathbb{R}$ funções suaves e $\nu$ o campo de vetores normais unitários exterior a $M$ ao longo de $\partial M$, então:*

*(a) (Primeira identidade de Green)*

$$\int_M h\Delta f dM = -\int_M \langle \nabla f, \nabla h\rangle dM + \int_{\partial M} h\frac{\partial f}{\partial \nu} d(\partial M) \tag{2.30}$$

*(b) (Segunda identidade de Green)*

$$\int_M (h\Delta f - f\Delta h) dM = \int_{\partial M} (h\frac{\partial f}{\partial \nu} - f\frac{\partial h}{\partial \nu}) d(\partial M). \tag{2.31}$$

*Demonstração.* Para o item $(a)$ aplicamos o teorema da divergência ao campo $X = h\nabla f$. O item $(b)$ segue agora imediatamente de $(a)$, trocando $h$ por $f$ em $(a)$ e subtraindo membro a membro as duas identidades assim obtidas. □

### 2.1.2 Tensores e os Operadores Diferenciais

Nesta seção veremos algumas importantes propriedades dos tensores as quais envolvem os operadores diferenciais e são úteis em análise geométrica. Nosso primeiro trabalho será definir um produto interno entre tensores.

Seja $(x_1, \ldots, x_n)$ um sistema de coordenadas locais em uma variedade diferenciável $M^n$ com métrica Riemanniana $g = \langle , \rangle$, $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ o referencial coordenado e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial ortonormal. O *traço* de um $(0,2)$-tensor $T$ é dado por

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_i T(e_i, e_i),$$

ou ainda,

$$\mathrm{tr}(T) = g^{ij} T(\partial_i, \partial_j) = g^{ij} g(T(\partial_i), \partial_j). \tag{2.32}$$

Observemos que $T(\partial_i) = g^{kl} g(T(\partial_i), \partial_k)\partial_l = g^{kl} g(\partial_i, T^*(\partial_k))\partial_l$, onde $T^*$ é o operador adjunto de $T$. Consideremos outro $(0,2)$-tensor $S$ e seus respectivos $(1,1)$-tensores, dados por

$$T(X,Y) = \langle T(X), Y\rangle \;\text{ e }\; S(X,Y) = \langle S(X), Y\rangle. \tag{2.33}$$

Desta forma, temos $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $S : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$. Além disso, $S^* : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\langle S(X), Y\rangle = \langle X, S^*(Y)\rangle$. Vamos procurar uma expressão para $\mathrm{tr}(TS^*)$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(TS^*) &\overset{(2.32)}{=} g^{ij}g\left((TS^*)(\partial_i), \partial_j\right) = g^{ij}g\left(T\left(S^*(\partial_i)\right), \partial_j\right) \\
&= g^{ij}g(T(g^{kl}g(\partial_i, S(\partial_k))\partial_l), \partial_j) \\
&= g^{ij}g^{kl}g(S(\partial_k), \partial_i)g(T(\partial_l), \partial_j) = g^{ij}g^{kl}S_{ki}T_{lj}.
\end{aligned}$$

A simetria da matriz $(g^{ij})$ e uma renumeração nos índices permite-nos escrever

$$\mathrm{tr}(TS^*) = g^{ik}g^{jl}T_{ij}S_{kl}. \tag{2.34}$$

Assim, em $\{e_1, \ldots, e_n\}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(TS^*) &= \sum_{i,j} T_{ij}S_{ij} = \sum_{i,j} g(T(e_i), e_j)g(S(e_i), e_j) \\
&= \sum_i g(T(e_i), \sum_j g(S(e_i), e_j)e_j) = \sum_i g(T(e_i), S(e_i)),
\end{aligned}$$

$$\mathrm{tr}(TT^*) = \sum_i g(T(e_i), T(e_i)) = \sum_i |T(e_i)|^2 \tag{2.35}$$

e

$$\mathrm{tr}(Tg^*) = \sum_i g\left(T(e_i), I(e_i)\right) = \sum_i g\left(T(e_i), e_i\right) = \mathrm{tr}(T). \tag{2.36}$$

As relações (2.34) e (2.35) nos mostram que podemos definir um *produto interno* entre os $(0, 2)$-tensores $T$ e $S$, fazendo

$$\langle T, S\rangle := \mathrm{tr}(TS^*). \tag{2.37}$$

Este é conhecido como *produto interno de Hilbert-Schmidt.*

Independentemente da equação (2.34), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(TS^*) &= \sum_i \langle TS^*(e_i), e_i\rangle = \sum_i \langle S^*(e_i), T^*e_i\rangle \\
&= \sum_i \left\langle \sum_j \langle S^*e_i, e_j\rangle e_j, \sum_k \langle T^*(e_i), e_k\rangle e_k \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle e_i, Se_j\rangle\langle e_i, Te_k\rangle\delta_j^k = \sum_{i,j} \langle e_i, Se_j\rangle\langle e_i, Te_j\rangle \\
&= \sum_j \Big\langle \sum_i \langle e_i, Te_j\rangle e_i, Se_j \Big\rangle = \sum_j \langle Te_j, Se_j\rangle.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

**Exemplo 2.6.** *Seja $(M, g)$ uma variedade Riemanniana $n$-dimensional. Definimos o tensor sem traço de um tensor $T$ por*

$$\mathring{T} := T - \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} g.$$

*Então*

$$0 \leq |\mathring{T}|^2 = \left| T - \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} g \right|^2 = |T|^2 - \frac{\mathrm{tr}(T)^2}{n}.$$

*Assim,*

$$|T|^2 \geq \frac{\mathrm{tr}(T)^2}{n},$$

*ocorrendo a igualdade se, e só se,*

$$T = \frac{\mathrm{tr}(T)}{n} g.$$

*Em particular, se $T = \nabla^2 f$, temos*

$$|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{(\Delta f)^2}{n}. \tag{2.39}$$

**Proposição 2.4.** *Para todo campo de vetores diferenciável $X$ e $Y$ em uma variedade Riemanniana $(M^n, g = \langle , \rangle)$, são válidas as seguintes fórmulas:*

1. $\Delta\langle X, Y\rangle = \mathrm{div}\big((\mathcal{L}_X g)(Y)\big) + \mathrm{div}\big((\mathcal{L}_Y g)(X)\big) - \mathrm{div}(\nabla_X Y) - \mathrm{div}(\nabla_Y X)$.

2. $Ric(X, Y) = \mathrm{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\mathrm{div} Y)\rangle - \langle \nabla X, ^*\nabla Y\rangle$.

*Em que $^*\nabla Y$ é o dual de $\nabla Y$. Consequentemente,*

$$\begin{aligned} \Delta\langle X, Y\rangle &= \mathrm{div}\big((\mathcal{L}_X g)(Y)\big) + \mathrm{div}\big((\mathcal{L}_Y g)(X)\big) - \langle X, \nabla(\mathrm{div} Y)\rangle - \langle Y, \nabla(\mathrm{div} X)\rangle \\ &\quad -2Ric(X, Y) - \langle \nabla X, ^*\nabla Y\rangle - \langle \nabla Y, ^*\nabla X\rangle. \end{aligned} \tag{2.40}$$

*Demonstração.* Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial geodésico em um ponto $p \in M^n$, então

$$\begin{aligned} \Delta\langle X, Y\rangle_p &= \sum_i e_i e_i \langle X, Y\rangle = \sum_i e_i(\langle \nabla_{e_i} X, Y\rangle + \langle X, \nabla_{e_i} Y\rangle) \\ &= \sum_i (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} X, Y\rangle + \langle \nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} Y\rangle) + \langle \nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} Y\rangle + \langle X, \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} Y\rangle). \end{aligned}$$

Relembremos a propriedade da derivada de Lie

$$\langle (\mathcal{L}_X g)(Y), e_i\rangle = (\mathcal{L}_X g)(Y, e_i) = \langle \nabla_Y X, e_i\rangle + \langle \nabla_{e_i} X, Y\rangle \tag{2.41}$$

para deduzirmos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_X g)(Y)\big)_p &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(\mathcal{L}_X g)(Y), e_i\rangle \\
&= \sum_i (\langle \nabla_{e_i}\nabla_Y X, e_i\rangle + \langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} X, Y\rangle + \langle \nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} Y\rangle) \\
&= \mathrm{div}(\nabla_Y X) + \sum_i (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} X, Y\rangle + \langle \nabla_{e_i} X, \nabla_{e_i} Y\rangle).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_Y g)(X)\big)_p = \mathrm{div}(\nabla_X Y) + \sum_i (\langle \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} Y, X\rangle + \langle \nabla_{e_i} Y, \nabla_{e_i} X\rangle).$$

Assim,

$$\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_X g)(Y)\big) + \mathrm{div}\big((\mathcal{L}_Y g)(X)\big) = \mathrm{div}(\nabla_Y X) + \mathrm{div}(\nabla_X Y) + \Delta\langle X, Y\rangle.$$

O que prova o item 1.

Para o item 2, alertamos para o usando do fato de que $(\nabla_X e_i)(p) = 0$. Vejamos:

$$\begin{aligned}
Ric(X, Y) &= \sum_i \langle R(e_i, X)Y, e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_{e_i} Y - \nabla_{[e_i, X]} Y, e_i\rangle \\
&= \mathrm{div}(\nabla_X Y) - \sum_i \langle \nabla_X\nabla_{e_i} Y, e_i\rangle - \sum_i \langle \nabla_{\nabla_{e_i} X} Y, e_i\rangle \\
&= \mathrm{div}(\nabla_X Y) - X\big(\sum_i \langle \nabla_{e_i} Y, e_i\rangle\big) - \sum_i \langle \nabla Y(\nabla_{e_i} X), e_i\rangle \\
&= \mathrm{div}(\nabla_X Y) - X(\mathrm{div} Y) - \sum_i \langle \nabla_{e_i} X, {}^*\nabla Y(e_i)\rangle \\
&= \mathrm{div}(\nabla_X Y) - \langle X, \nabla(\mathrm{div} Y)\rangle - \langle \nabla X, {}^*\nabla Y\rangle.
\end{aligned}$$

O que prova o item 2. Analogamente,

$$Ric(Y, X) = \mathrm{div}(\nabla_Y X) - \langle Y, \nabla(\mathrm{div} X)\rangle - \langle \nabla Y, {}^*\nabla X\rangle.$$

Pela simetria do tensor de Ricci, deduzimos que

$$\begin{aligned}
2Ric(X, Y) &= \mathrm{div}(\nabla_X Y) + \mathrm{div}(\nabla_Y X) - \langle X, \nabla(\mathrm{div} Y)\rangle - \langle Y, \nabla(\mathrm{div} X)\rangle - \langle \nabla X, {}^*\nabla Y\rangle \\
&\quad - \langle \nabla Y, {}^*\nabla X\rangle.
\end{aligned}$$

Observe que esta última equação, juntamente com o item 1, é suficiente para provar a equação (2.40). □

**Proposição 2.5.** *Para todo campo de vetores diferenciável $X$ em uma variedade Riemanniana $(M^n, g = \langle , \rangle)$ e funções $f, \ell \in C^\infty(M)$, são válidas as seguintes fórmulas:*

1. $\frac{1}{2}\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X)\big) = Ric(X, \nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle + \langle \nabla^2 f, \nabla X\rangle$.

2. $\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = Ric(\nabla f, \nabla f) + |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle$.

3. $\Delta\langle \nabla f, \nabla \ell\rangle = 2Ric(\nabla f, \nabla \ell) + 2\langle \nabla^2 f, \nabla^2 \ell\rangle + \nabla f, \nabla(\Delta \ell)\rangle + \langle \nabla \ell, \nabla(\Delta f)\rangle$.

*Demonstração.* Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial geodésico em um ponto $p \in M^n$, então pela simetria de $\nabla^2 f$ deduzimos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X)\big)_p &= \frac{1}{2}\sum_i \langle \nabla_{e_i}(\mathcal{L}_{\nabla f} g)(X), e_i\rangle \overset{(2.41)}{=} \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla_X \nabla f, e_i\rangle \\
&= \sum_i \langle R(e_i, X)\nabla f + \nabla_X \nabla_{e_i}\nabla f + \nabla_{[e_i, X]}\nabla f, e_i\rangle \\
&= Ric(X, \nabla f) + X\big(\sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla f, e_i\rangle\big) + \sum_i \langle \nabla_{\nabla_{e_i} X}\nabla f, e_i\rangle \\
&= Ric(X, \nabla f) + X(\Delta f) + \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla f, \nabla_{e_i} X\rangle \\
&= Ric(X, \nabla f) + \langle X, \nabla(\Delta f)\rangle + \langle \nabla^2 f, \nabla X\rangle.
\end{aligned}$$

Isso prova o item 1. Em particular, para $X = \nabla f$

$$\frac{1}{2}\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_{\nabla f} g)(\nabla f)\big) = Ric(\nabla f, \nabla f) + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + |\nabla^2 f|^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_{\nabla f} g)\nabla f\big) &= \mathrm{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) = \sum_i \langle \nabla_{e_i}\nabla^2 f(\nabla f), e_i\rangle \\
&= \sum_i e_i\langle \nabla^2 f(\nabla f), e_i\rangle = \sum_i e_i \langle \nabla f, \nabla_{e_i}\nabla f\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_i e_i e_i \langle \nabla f, \nabla f\rangle = \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2,
\end{aligned}$$

o que é suficiente para concluirmos a prova da fórmula de Bochner (item 2). Mais geralmente, fazendo $X = \nabla \ell$ no item 1, temos

$$\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_{\nabla f} g)(\nabla \ell)\big) = 2Ric(\nabla \ell, \nabla f) + 2\langle \nabla \ell, \nabla(\Delta f)\rangle + 2\langle \nabla^2 f, \nabla^2 \ell\rangle.$$

Note que também podemos escrever

$$\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_{\nabla \ell} g)(\nabla f)\big) = 2Ric(\nabla f, \nabla \ell) + 2\langle \nabla f, \nabla(\Delta \ell)\rangle + 2\langle \nabla^2 \ell, \nabla^2 f\rangle.$$

De modo que, fazendo $X = \nabla f$ e $Y = \nabla \ell$ na equação (2.40), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta\langle \nabla f, \nabla \ell\rangle &= \operatorname{div}\big((\mathcal{L}_{\nabla f} g)(\nabla \ell)\big) + \operatorname{div}\big((\mathcal{L}_{\nabla \ell} g)(\nabla f)\big) - \langle \nabla f, \nabla(\Delta \ell)\rangle - \langle \nabla \ell, \nabla(\Delta f)\rangle \\ &\quad -2Ric(\nabla f, \nabla \ell) - 2\langle \nabla^2 f, \nabla^2 \ell\rangle \\ &= 2Ric(\nabla f, \nabla \ell) + 2\langle \nabla^2 f, \nabla^2 \ell\rangle + \langle \nabla f, \nabla(\Delta \ell)\rangle + \langle \nabla \ell, \nabla(\Delta f)\rangle.\end{aligned}$$

□

Para continuarmos precisaremos da definição seguinte.

**Definição 2.12.** *Definimos a divergência de um $(1, r)$-tensor $T$ em $M^n$, como sendo o $(0, r)$-tensor dado por*

$$(\operatorname{div} T)(v_1, \ldots, v_r)(p) = \operatorname{tr}\big(w \mapsto (\nabla_w T)(v_1, \ldots, v_r)(p)\big),$$

*onde $p \in M^n$ e $(v_1, \ldots, v_r) \in T_pM \times \ldots \times T_pM$.*

Seja $T$ um $(0, 2)$-tensor em uma variedade Riemanniana $(M^n, g)$, tomemos um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em $(M^n, g)$. Consideremos o seu $(1, 1)$-tensor correspondente $T$. Então, $\operatorname{div} T$ é um $(0, 1)$-tensor que satisfaz, para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} T)(Z) &= \sum_i g(\,(\nabla_{e_i} T)(Z), e_i\,) \\ &= \sum_i g(\,\nabla_{e_i} T(Z) - T(\nabla_{e_i} Z),\, e_i\,) \\ &= \sum_i g(\,\nabla_{e_i} T(Z),\, e_i\,) - g(\,T(\nabla_{e_i} Z),\, e_i\,) \\ &= \operatorname{div}(T(Z)) - \sum_i T(\nabla_{e_i} Z, e_i).\end{aligned}$$

Portanto, de acordo com a definição em (2.33), temos

$$\operatorname{div}(T(Z)) = (\operatorname{div} T)(Z) + \langle \nabla Z, T^*\rangle. \tag{2.42}$$

Além disso, de acordo com a Observação 2.1, a métrica Riemanniana $g$ em $M$, induz em cada espaço dual $T_p^*M$ do espaço tangente $T_pM$, um produto interno com propriedades análogas a $g$, bastando definir para cada $X^\flat, Y^\flat \in T_p^*M$

$$\langle X^\flat, Y^\flat\rangle = \langle X, Y\rangle, \tag{2.43}$$

em que $X, Y \in T_pM$ são os vetores correspondentes a $X^\flat$ e $Y^\flat$, respectivamente. Ademais,

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}T, Z^\flat\rangle = \langle (\mathrm{div}T)^\sharp, Z\rangle &= \sum_i \langle (\mathrm{div}T)^\sharp, e_i\rangle\langle Z, e_i\rangle = \sum_i (\mathrm{div}T)(e_i)\langle Z, e_i\rangle \\ &= (\mathrm{div}T)\Big(\sum_i \langle Z, e_i\rangle e_i\Big) = (\mathrm{div}T)(Z).\end{aligned}$$

Ao se escrever esta última relação para um $(0,2)$-tensor, fica implícito que estamos trabalhando com o $(1,1)$-tensor correspondente. Ademais, quando não houver perigo de confusão, omitiremos por simplicidade o " $\sharp$ ".

Relembremos que o $(1,1)$-tensor identidade $I$ de $\mathfrak{X}(M)$ está associado ao $(0,2)$-tensor métrico $g$, o que permite considerar $\mathrm{div}g = \mathrm{div}I$ ou, mais geralmente, vamos provar o próximo resultado bastante usado em análise geométrica.

**Fato 2.4.** *As seguintes fórmulas são válidas em qualquer variedade Riemanniana $(M^n, g)$:*

1. $\mathrm{div}(fg) = df$*, para toda* $f \in C^\infty(M)$.

2. $\mathrm{div}Ric = \frac{1}{2}dS$ *(segunda identidade de Bianchi contraída).*

*Demonstração.* Para o primeiro item basta aplicar a definição de divergência de tensores e usar o fato que $\nabla g \equiv 0$. Pelo caráter pontual dos tensores, é suficiente provar o segundo item para um referencial geodésico $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em $p \in M$, para isso relembremos as seguintes notações: $R(e_i, e_j, e_k) = R_{ijk}$, $\nabla_{e_i} = \nabla_i$ e a segunda identidade de Bianchi, cf. item 4 da Proposição 2.1, a saber

$$\nabla_i R_{jkl} + \nabla_j R_{kil} + \nabla_k R_{ijl} = 0.$$

Sendo assim, vamos calcular

$$dS(e_k) = e_k(S) = e_k\Big(\sum_i Ric(e_i, e_i)\Big) = \sum_{i,j} e_k\langle R_{jii}, e_j\rangle = \sum_{i,j}\langle \nabla_k R_{jii}, e_j\rangle.$$

Pela antisimetria dos dois primeiros índices do tensor curvatura e pela segunda identidade de Bianchi

$$\begin{aligned}dS(e_k) = -\sum_{i,j}\langle \nabla_k R_{iji}, e_j\rangle &= \sum_{i,j}\langle \nabla_i R_{jki}, e_j\rangle + \sum_{i,j}\langle \nabla_j R_{kii}, e_j\rangle \\ &= \sum_{i,j}\langle \nabla_i R_{jki}, e_j\rangle + \sum_{j,i}\langle \nabla_j R_{ikj}, e_i\rangle,\end{aligned}$$

onde na última parcela usamos que, em $p$, $e_j\langle R_{kii}, e_j\rangle = e_j(R_{kiij}) = e_j(R_{ikji}) = e_j\langle R_{ikj}, e_i\rangle$. Por outro lado, ainda no ponto $p$, temos

$$\begin{aligned}(\mathrm{div}Ric)(e_k) &= \sum_i \langle(\nabla_i Ric)e_k, e_i\rangle = \sum_i \langle \nabla_i Ric(e_k), e_i\rangle = \sum_i e_i\langle Ric(e_k), e_i\rangle \\ &= \sum_i e_i(Ric(e_k, e_i)) = \sum_{i,j} e_i\langle R_{jki}, e_j\rangle = \sum_{i,j}\langle \nabla_i R_{jki}, e_j\rangle,\end{aligned}$$

que é suficiente para concluírmos o resultado do item 2. □

Em seguida vamos considerar o $(1,1)$-tensor $\nabla Z$ em $M^n$, de maneira que a equação (2.42) nos permita provar o lema seguinte, o qual veremos que sua utilidade está além da teoria desenvolvida neste capítulo.

**Lema 2.1.** *Seja $T$ um $(0,2)$-tensor simétrico em uma variedade Riemanniana $(M^n, g)$. Então vale*

$$\mathrm{div}(T(\varphi Z)) = \varphi\langle \mathrm{div}T, Z\rangle + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z),$$

*para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função diferenciável $\varphi$ em $M^n$. Em particular, se $Z = \nabla f$, para alguma função diferenciável $f$ em $M^n$, então*

$$\mathrm{div}(T(\varphi\nabla f)) = \varphi(\mathrm{div}T)(\nabla f) + \varphi\langle \nabla^2 f, T\rangle + T(\nabla\varphi, \nabla f).$$

*Demonstração.* Pelas propriedades do operador divergente, pela equação (2.42) e pela simetria de $T$, teremos

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(T(\varphi Z)) &= \mathrm{div}(\varphi T(Z)) = \varphi \mathrm{div}(T(Z)) + g(\,\nabla\varphi, T(Z)\,) \\ &= \varphi(\mathrm{div}T)(Z) + \varphi\langle \nabla Z, T\rangle + T(\nabla\varphi, Z),\end{aligned}$$

para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e qualquer função diferenciável $\varphi$ em $M^n$. □

Para àqueles que despertarem interesse em outras aplicações do referido lema, recomendamos uma breve lida em [3, 4, 22, 30]. Por exemplo, quando trabalhamos com hipersuperfícies $n$-dimensionais de uma forma espacial, podemos considerar as $r$-ésimas funções simétricas da curvatura $S_r$, os $r$-ésimos tensores de Newton $P_r$ e o operador $L_r$. Relembremos que os tensores de Newton são definidos indutivamente por: $P_0 = I$ e, para $1 \le r \le n$, $P_r = S_r I - AP_{r-1}$, onde $A$ é o operador de Weingartein da hipersuperfície. Enquanto que o operador $L_r : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ é definido por

$$L_r(f) = \mathrm{tr}(P_r \circ \nabla^2 f) = \langle P_r, \nabla^2 f\rangle.$$

Um fato importante que foi provado por Rosenberg em [37] é que cada $L_r$ toma uma forma divergente. Mais exatamente, temos

$$L_r(f) = \mathrm{div}(P_r \nabla f).$$

Com efeito, isto segue imediatamente fazendo $T = P_r$ e $Z = \nabla f$ no Lema 2.1, e do fato de $\mathrm{div} P_r = 0$.

Para o que segue, definimos o laplaciano $\Delta df$ da diferencial $df$ de uma função $f \in C^\infty(M)$, pela divergência do $(1,1)$-tensor correspondente ao $(0,2)$-tensor $\nabla df = \nabla^2 f$.

A equação a seguir, mostra a não-comutatividade do laplaciano com a diferencial. Alguns autores se referem a ela por fórmula contraída de Bochner ou fórmula de Bochner na forma $(0,1)$-tensorial.

**Corolário 2.1.**

$$\Delta df = d\Delta f + Ric(\nabla f, \cdot), \tag{2.44}$$

*em que* $\Delta df := \mathrm{div} \nabla df$.

*Demonstração.* Pelo item 2 da Proposição 2.4

$$\begin{aligned} Ric(X, \nabla f) &= \mathrm{div}(\nabla_X \nabla f) - \langle X, \nabla(\Delta f) \rangle - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle \\ &= \mathrm{div}(\nabla^2 f(X)) - (d\Delta f)(X) - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle. \end{aligned}$$

Reagrupando, utilizando a equação (2.42) e observando que $\nabla df = \nabla^2 f$, obtemos

$$Ric(X, \nabla f) + (d\Delta f)(X) = \mathrm{div}(\nabla^2 f(X)) - \langle \nabla X, \nabla^2 f \rangle = (\mathrm{div} \nabla^2 f)(X) = (\Delta df)(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, que é suficiente pra concluir o resultado do presente corolário, uma vez que o tensor de Ricci é simétrico. □

Em geral, definimos o laplaciano de um $(1,r)$-tensor $T$ em $M^n$, como sendo o $(0, r+1)$-tensor dado por

$$\Delta T = \mathrm{div} \nabla T.$$

Se o tensor de Ricci de uma variedade Riemanniana $(M^n, g)$ satisfaz $Ric(X) = KX$, ou equivalentemente $Ric(X,Y) = Kg(X,Y)$, dizemos que $(M^n, g)$ é uma variedade Einstein com função de Einstein $K = \frac{S}{n}$, onde $S$ é a curvatura escalar de $(M^n, g)$. Em particular, se $(M^n, g)$ tem curvatura seccional constante $k$, então $(M^n, g)$ é Einstein com constante de

Einstein igual a $(n-1)k$. Ademais, uma conta direta mostra que toda superfície Riemanniana é uma variedade Einstein. Para o caso em que $M^n$ é conexa de dimensão $n \geq 3$, o Teorema de Schur garante que a função de Einstein é constante igual a $\frac{S}{n}$, uma prova deste fato pode ser encontrada em [12].

Relacionado a este tópico, vamos recordar a definição que aparece no Exemplo 2.6, para o caso particular do tensor de Ricci, a saber

$$\overset{\circ}{Ric} := Ric - \frac{S}{n}g.$$

Assim, pelo Fato 2.4 teremos

$$\operatorname{div}\overset{\circ}{Ric} = \frac{n-2}{2n}dS.$$

Também precisaremos do lema abaixo, que é uma propriedade geral para $(0,2)$-tensores simétricos em uma variedade Riemanniana.

**Lema 2.2.** *Para todo $(0,2)$-tensor simétrico $T$ em uma variedade Riemanniana $(M^n, g)$, vale*

$$\langle \mathcal{L}_Z g, T\rangle = 2\langle \nabla Z, T\rangle,$$

*para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

*Demonstração.* Basta tomar um referencial ortonormal local $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em $(M^n, g)$, usar a equação (2.10) e a simetria de $T$ para ver que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_Z g, T\rangle &= \sum_{i,j}(\mathcal{L}_Z g)_{ij}T_{ij} = \sum_{i,j}(g(\nabla_{e_i}Z, e_j) + g(\nabla_{e_j}Z, e_i))T_{ij} \\
&= 2\sum_{i,j} g(\nabla_{e_i}Z, e_j)T_{ij} = 2\sum_{i,j} g(\nabla_{e_i}Z, e_j)g(Te_i, e_j) = 2\langle \nabla Z, T\rangle.
\end{aligned}$$

□

## 2.2 Imersões Isométricas

**Definição 2.13.** *Sejam $M^n$ e $\bar{M}^{n+m}$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $F : M \to \bar{M}$ é uma imersão se a diferencial $dF_p$ é injetiva para todo $p \in M$. O número $m$ é a codimensão da imersão $F$. Se, além disso, $F$ é um homeomorfismo sobre $F(M) \subset \bar{M}$, onde $F(M)$ tem a topologia induzida por $\bar{M}$, diz-se que $F$ é um mergulho. Se $M \subset \bar{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \bar{M}$ é um mergulho, diz-se que $M$ é uma subvariedade de $\bar{M}$. Chamamos*

*$\bar{M}$ de variedade ambiente. O caso particular em que a codimensão $m$ da imersão é 1, $F(M)$ é denominada uma hipersuperfície.*

**Definição 2.14.** *Sejam $M^n$ e $\bar{M}^{n+m}$ duas variedades diferenciáveis com métricas $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\bar{M}}$, respectivamente. Uma imersão $F : M^n \to \bar{M}^{n+m}$ é chamada imersão isométrica (ou Riemanniana) se*

$$\langle X, Y\rangle_M = \langle dF_p(X), dF_p(Y)\rangle_{\bar{M}}$$

*para todo $p \in M$ e todos $X, Y \in T_pM$.*

Seja $F : M^n \to \bar{M}^{n+m}$ uma imersão. Segue da forma local das imersões que para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de $p$ tal que a restrição de $F$ a $U$ é um mergulho sobre $F(U)$, para uma prova precisa deste fato ver, por exemplo, [12]. Mais precisamente, existem uma vizinhança $\bar{U} \subset \bar{M}$ de $F(p)$, um aberto $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ e um difeomorfismo $\varphi : \bar{U} \to V$, tais que $\varphi$ aplica difeomorficamente $F(U) \cap \bar{U}$ em um aberto do subespaço $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Desta forma podemos simplificar a notação identificando $U$ com sua imagem $F(U)$ e cada vetor $v \in T_qM, q \in U$, com $dF_q(v) \in T_{F(q)}\bar{M}$. Sendo assim, o espaço tangente de $M$ em $q$ se torna um subespaço do espaço tangente de $\bar{M}$ em $q$ (aqui já estamos identificando $q$ com $F(q)$). Além disso, podemos estender (localmente) os campos de vetores em $M$ para campos de vetores em $\bar{M}$, isto é, os campos de vetores em $M$ restritos a $U$ podem ser estendidos a campos de vetores em $\bar{U}$. Ademais, assumindo a partir de agora que $F$ seja uma imersão isométrica, vamos observar que para cada $q \in U$, o produto interno em $T_q\bar{M}$ o decompõe na soma direta

$$T_q\bar{M} = T_qM \oplus T_qM^\perp$$

onde $T_qM^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_qM$ em $T_q\bar{M}$. Assim, para cada $v \in T_q\bar{M}$, podemos escrever $v = v^\top + v^\perp$, com $v^\top \in T_qM$ e $v^\perp \in T_qM^\perp$. Neste caso, denominamos $v^\top$ a componente tangencial de $v$ e $v^\perp$ a componente normal de $v$. Desta decomposição obtemos um fibrado vetorial $TM^\perp := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM^\perp$ chamado o fibrado normal a $M$. Deste modo, o fibrado vetorial

$$T\bar{M}|_{F(M)} = \{X \in T\bar{M} : \pi(X) \in F(M), \text{ em que } \pi : T\bar{M} \to \bar{M} \text{ é a projeção canônica}\}$$

é a soma de Whitney do fibrado tangente $TM$ com o fibrado normal $TM^\perp$, isto é,

$$T\bar{M}|_{F(M)} = TM \oplus_W TM^\perp.$$

Sendo assim, podemos considerar as seguintes projeções:

$$(\ )^{\top} : T\bar{M}|_{F(M)} \to TM \ \text{ e } \ (\ )^{\perp} : T\bar{M}|_{F(M)} \to TM^{\perp}.$$

Sejam $\bar{\nabla}$ e $\nabla$ as conexões de Levi-Civita de $\bar{M}$ e $M$, respectivamente. Se $X$ e $Y$ são campos locais de vetores em $M$ e $\bar{X}$, $\bar{Y}$ são extensões locais a $\bar{M}$ temos que

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^{\top} + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^{\perp}. \tag{2.45}$$

Vamos estudar cada uma dessas parcelas separadamente. Para tanto, sejam $X, Y, Z$ campos de vetores em $U \subset M$ (que estamos identificando com $F(U)$) e $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ as respectivas extensões locais a $\bar{M}$. Como $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}$ em $q \in U$ só depende de $\bar{X}(q) = X(q)$ e dos valores de $\bar{Y}$ ao longo de qualquer curva diferenciável tangente a $X(q)$, podemos definir (independentemente das extensões) os dois entes geométricos a seguir:

$$D_XY := (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^{\top} \quad \text{e} \quad \alpha(X,Y) := (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^{\perp}.$$

Pela linearidade da projeção $(\,)^{\top}$ e pelas propriedades de $\bar{\nabla}$, é imediato que $D$ satisfaz as propriedades de uma conexão afim. Além disso, em $U$, temos

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle &= \bar{X}\langle \bar{Y},\bar{Z}\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y},\bar{Z}\rangle + \langle \bar{Y},\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}\rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y},Z\rangle + \langle Y,\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}\rangle \\ &= \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^{\top},Z\rangle + \langle Y,(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^{\top}\rangle = \langle D_XY,Z\rangle + \langle Y,D_XZ\rangle \end{aligned}$$

e, a expressão local dos colchetes (ver (1.1)) nos permite deduzir que, em $U$, $[\bar{X},\bar{Y}]^{\top} = [X,Y]$, logo

$$D_XY - D_YX \;=\; (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^{\top} - (\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X})^{\top} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X})^{\top} = [\bar{X},\bar{Y}]^{\top} = [X,Y].$$

Consequentemente, $D$ satisfaz a expressão local da conexão Riemanniana de $M$, assim por unicidade, $D_XY = \nabla_XY$.

Passemos ao estudo de $\alpha(X,Y)$. De acordo com este último resultado que obtivemos e pela equação (2.45), já temos que

$$\alpha(X,Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_XY.$$

Pelas propriedades de linearidade de uma conexão, é imediato a linearidade de $\alpha$ em $X$ e $Y$. A partir do caráter tensorial das conexões, deduzimos que $\alpha$ é $C^{\infty}(U)$-linear em $X$. No caso de $Y$, consideremos $f \in C^\infty(U)$ e $\bar{f}$ uma extensão de $f$ a $\bar{U}$. Notando que, em $U$, $\bar{X}(\bar{f})\bar{Y} = X(f)Y$, temos

$$\begin{aligned} \alpha(X, fY) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{f}\bar{Y}) - \nabla_X(fY) &= \bar{X}(\bar{f})\bar{Y} + \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - X(f)Y - f\nabla_X Y \\ &= f\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - f\nabla_X Y = f\alpha(X, Y). \end{aligned}$$

Além disso, $\alpha$ é simétrica, pois

$$\alpha(X, Y) = [\bar{X}, \bar{Y}] + \nabla_{\bar{Y}}\bar{X} - ([X, Y] + \nabla_Y X) = \nabla_{\bar{Y}}\bar{X} - \nabla_Y X = \alpha(Y, X).$$

Ou seja, $\alpha$ é bilinear sobre $C^\infty(U)$ e simétrica. Vamos reescrever (2.45) como segue

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} = \nabla_X Y + \alpha(X, Y). \tag{2.46}$$

Esta equação é conhecida como a *fórmula de Gauss*. A grosso modo, podemos dizer que a equação (2.46) nos conduz ao estudo de duas geometrias sobre $M$, uma tangente dada pela primeira parcela, e outra normal dada pela segunda parcela. Com o objetivo de estabelecermos uma ligação entre elas, consideremos $\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}$ um referencial ortonormal local em $\mathfrak{X}(U)^\perp$. Então, para cada $\nu_i$, temos

$$0 = X\langle \nu_i, Y\rangle \;=\; \langle \bar{\nabla}_X \nu_i, Y\rangle + \langle \nu_i, \bar{\nabla}_X Y\rangle = \langle (\bar{\nabla}_X \nu_i)^\top, Y\rangle + \langle \nu_i, \alpha(X, Y)\rangle.$$

Portanto, é conveniente definirmos o $(1,1)$-tensor $\mathcal{A}_{\nu_i} : \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$ por

$$\mathcal{A}_{\nu_i} X = -(\bar{\nabla}_X \nu_i)^\top.$$

De modo que, a equação abaixo é imediatamente satisfeita

$$\langle \mathcal{A}_{\nu_i} X, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), \nu_i\rangle, \tag{2.47}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Como de praxe, podemos definir $\mathcal{A}_{\nu_i}$ como sendo o $(0,2)$-tensor dado por $\mathcal{A}_{\nu_i}(X, Y) := \langle \mathcal{A}_{\nu_i} X, Y\rangle$, o qual é simétrico, isto é, $\langle \mathcal{A}_{\nu_i} X, Y\rangle = \langle X, \mathcal{A}_{\nu_i} Y\rangle$. A aplicação $\mathcal{A}_{\nu_i}$ é o *operador de Weingerten* ou *operador de forma* da imersão $F$, enquanto que (2.47) é a *equação de Weingerten*.

Com fins de formalização do operador $\alpha$, indicaremos por $\mathfrak{X}(U)^\perp$ os campos de vetores (diferenciáveis em $U$) normais aos campos tangentes diferenciáveis em $U$.

**Definição 2.15.** *A aplicação bilinear sobre $C^\infty(U)$ e simétrica $\alpha : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^\perp$ definida por* (2.46) *é a segunda forma fundamental de $F$. Em particular, escrevendo $\alpha(X, Y)$*

*em coordenadas locais, para cada $p \in M$ a aplicação $\alpha_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^{\perp}$ dada por $\alpha_p(X,Y) = \alpha(X,Y)(p)$ depende somente dos valores de $X$ e $Y$ em $p$, portanto o campo de vetores normais $\alpha(X,Y)$ tem caráter tensorial.*

Como o operador $\mathcal{A}_{\nu_i}$ é simétrico, convém considerarmos o seu traço, para isso vamos definir a função curvatura média $H_i$ na direção $\nu_i$, dada por

$$H_i := \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\mathcal{A}_{\nu_i}).$$

De modo que, podemos definir um campo local de vetores diferenciáveis normais a $M$ pela expressão $\mathbf{H} := \sum_i^m H_i\nu_i$. Este campo independe dos $\nu_i\,'s$, uma vez que, para cada $p \in M$, temos

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}\sum_i^m \mathrm{tr}(\mathcal{A}_{\nu_i})\nu_i = \frac{1}{n}\sum_i^m\sum_j^n \langle \mathcal{A}_{\nu_i}e_j, e_j\rangle\nu_i = \frac{1}{n}\sum_j^n\sum_i^m \langle\alpha(e_j,e_j),\nu_i\rangle\nu_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \alpha(e_j,e_j),$$

em que $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_pM$. Segue que $n\mathbf{H} = \mathrm{tr}(\alpha)$, o que prova a independência afirmada. Dizemos que $\mathbf{H}$ é o vetor curvatura média da imersão $F$. Observemos que, se $M$ é orientável podemos definir $\mathbf{H}$ globalmente.

**Definição 2.16.** *Dizemos que uma imersão isométrica $F$ é mínima em $p \in M$ quando $\boldsymbol{H}(p) = 0$ e que $F$ é uma imersão mínima quando é mínima em todos os pontos de $M$.*

Quando a codimensão da imersão $F$ é 1, com campo de vetores $\nu$ unitários normais a $M$, basta estudarmos a função curvatura média $H = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\mathcal{A}_\nu)$ de $F$. Neste caso, segue que

$$\mathbf{H} = H\nu \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_\nu X = -(\bar\nabla_X\nu)^{\top} = -\bar\nabla_X\nu.$$

Continuando em codimensão um, vamos considerar $E_1,\ldots,E_n$ extensões locais ortogonais (tangentes a $M$) da base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de $T_pM$ que diagonaliza $\mathcal{A}_\nu$. Além disso, $\bar E_1,\ldots,\bar E_n$ serão as respectivas extensões a campos de vetores locais em $\bar M$, de modo que $\mathcal{A}_\nu e_i = \lambda_i e_i$. Então, para cada $p \in M$, vale a *equação de Gauss* a saber:

$$K_{ij} - \bar K_{ij} = \lambda_i\lambda_j. \tag{2.48}$$

De fato, como $\bar E_i = E_i$ em $M$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle R(E_i,E_j)E_j,E_i\rangle - \langle \bar R(\bar E_i,\bar E_j)\bar E_j,\bar E_i\rangle \;&=\; \langle \nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_j - \nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_j - \nabla_{[E_i,E_j]}E_i\,,\,E_i\rangle\\ &\quad -\langle \bar\nabla_{\bar E_i}\bar\nabla_{\bar E_j}\bar E_j - \bar\nabla_{\bar E_j}\bar\nabla_{\bar E_i}\bar E_j - \bar\nabla_{[\bar E_i,\bar E_j]}\bar E_i\,,\,E_i\rangle.\end{aligned}$$

Note que $\langle \bar{\nabla}_{[\bar{E}_i,\bar{E}_j]}\bar{E}_i - \nabla_{[E_i,E_j]}E_i \, , \, E_i\rangle = 0$, e

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\bar{\nabla}_{\bar{E}_j}\bar{E}_k &= \bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\big(\nabla_{E_j}E_k + \alpha(E_j, E_k)\big) \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\nabla_{E_j}E_k + \bar{\nabla}_{\bar{E}_i}(\langle\alpha(E_j, E_k), \nu\rangle\nu) \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\nabla_{E_j}E_k + \bar{E}_i\langle\alpha(E_j, E_k), \nu\rangle\nu + \langle\alpha(E_j, E_k), \nu\rangle\bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\nu \\
&= \bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\nabla_{E_j}E_k + \bar{E}_i\langle\mathcal{A}_\nu E_j, E_k\rangle\nu - \langle\mathcal{A}_\nu E_j, E_k\rangle\mathcal{A}_\nu E_i.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\bar{\nabla}_{\bar{E}_j}\bar{E}_j \, , \, E_i\rangle &= \langle\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}E_j \, , \, E_i\rangle - \langle\mathcal{A}_\nu E_j, E_j\rangle\langle\mathcal{A}_\nu E_i \, , \, E_i\rangle \\
\langle\bar{\nabla}_{\bar{E}_j}\bar{\nabla}_{\bar{E}_i}\bar{E}_j \, , \, E_i\rangle &= \langle\nabla_{E_j}\nabla_{E_i}E_j \, , \, E_i\rangle - \langle\mathcal{A}_\nu E_i, E_j\rangle^2.
\end{aligned}$$

Observe que utilizamos a simetria de $\mathcal{A}_\nu$ na segunda parcela da última equação acima.

Consequentemente, teremos

$$\langle R(E_i, E_j)E_j, E_i\rangle - \langle\bar{R}(\bar{E}_i, \bar{E}_j)\bar{E}_j, \bar{E}_i\rangle = \langle\mathcal{A}_\nu E_j, E_j\rangle\langle\mathcal{A}_\nu E_i \, , \, E_i\rangle - \langle\mathcal{A}_\nu E_i, E_j\rangle^2. \tag{2.50}$$

Assim, em $p$, vamos obter a equação (2.48), conforme havíamos afirmado. Ademais, notando que

$$\langle\mathcal{A}_\nu E_i, E_j\rangle\langle\mathcal{A}_\nu E_k, E_l\rangle = \langle\alpha(E_i, E_j), \nu\rangle\langle\alpha(E_k, E_l), \nu\rangle = \langle\alpha(E_i, E_j), \alpha(E_k, E_l)\rangle,$$

a equação (2.50) é equivalente a

$$\langle R(E_i, E_j)E_j, E_i\rangle - \langle\bar{R}(\bar{E}_i, \bar{E}_j)\bar{E}_j, \bar{E}_i\rangle = \langle\alpha(E_j, E_j), \alpha(E_i, E_i)\rangle - |\alpha(E_i, E_j)|^2.$$

Uma conta análoga a esta feita anteriormente, prova a equação de Gauss em seu formato mais geral a seguir.

**Teorema 2.2.** *Seja $F : M^n \to \bar{M}^{n+m}$ uma imersão isométrica. Para cada $p \in M$ e todos vetores ortonormais $x, y \in T_pM$, é válida a seguinte fórmula:*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle\alpha(x, x), \alpha(y, y)\rangle - |\alpha(x, y)|^2. \tag{2.51}$$

**Observação 2.3.** *Trocando a condição de positividade de $g_p$ na Definição 1.13 pela condição mais geral de não degenerescência (porém, não necessariamente positiva definida) em cada espaço tangente (em $p$) da variedade diferenciável, teremos o que chamamos de métrica pseudo-Riemanniana. Sendo assim, todas as definições e os resultados apresentados até* *aqui, que não dependeram da positividade da métrica, mas somente da não degenerescência da mesma, passam a valer tomando o devido cuidado de acrescentar, quando necessário, o sinal dos vetores envolvidos. A seguir veremos um exemplo de variedade diferenciável que contém uma métrica pseudo-Riemanniana, mas para o nosso propósito, o interessante é que ela contém uma variedade Riemanniana.*

Denotaremos por $\mathbb{R}^{n+1}_\tau$, $\tau \in \{0,1\}$, o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$ munido com o produto interno $\langle\, , \rangle$ dado por

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i + (-1)^\tau v_{n+1} w_{n+1},$$

em que $v = (v_1, \ldots, v_{n+1})$ e $w = (w_1, \ldots, w_{n+1})$ são vetores de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Note que $\mathbb{R}^{n+1}_\tau$ tem coeficientes da métrica constantes o que vai implicar em símbolos de Christoffel todos nulos e portanto sua conexão $\bar{\nabla}$ é como no espaço euclidiano. Então, para hipersuperfícies Riemannianas isometricamente imersas em $\mathbb{R}^{n+1}_\tau$ com campo de vetores normais unitários $\nu$, teremos

$$\mathcal{A}_\eta(X) = -\bar{\nabla}_X \nu = -d\nu(X). \tag{2.52}$$

Relembremos que a esfera canônica é definida por

$$\mathbb{S}^n(1) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}_0; \langle p, p\rangle = 1\}.$$

Enquanto que o espaço hiperbólico canônico é definido por

$$\mathbb{H}^n(-1) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}_1; \langle p, p\rangle = -1,\, p_{n+1} \geq 1\},$$

que é uma hipersuperfície tipo espaço de $\mathbb{R}^{n+1}_1$, isto é, o produto interno $\langle\, , \rangle$ restrito a $\mathbb{H}^n(-1)$ é uma métrica Riemanniana. Este fato segue da caracterização de seu espaço tangente em cada ponto, conforme veremos a seguir.

Por simplicidade, vamos nos referir a estas duas variedades por $\mathbb{M}^n(c) \subset \mathbb{R}^{n+1}_\tau$, com $c \in \{-1, 1\}$.

Seja $p \in \mathbb{M}^n(c)$ e $v \in T_p\mathbb{M}^n(c)$, isto é, $v = \beta'(0)$ e $\beta : I \to \mathbb{M}^n(c)$ é uma curva diferenciável com $\beta(0) = p$. Então, $\langle \beta(t), \beta(t)\rangle = c$, donde $0 = \langle \beta'(0), \beta(0)\rangle = \langle v, \vec{p}\rangle$, em que $\vec{p}$ é o vetor-posição em $p$. Isto prova que $T_p\mathbb{M}^n(c) = \langle \vec{p}\rangle^\perp$, e podemos escolher $\nu(p) = \vec{p}$ como campo de vetores normais unitários, com $\langle \vec{p}, \vec{p}\rangle = c$, de modo que, pela equação (2.52), a conexão

Riemanniana $\nabla$ de $\mathbb{M}^n(c)$ é dada por

$$\begin{aligned}\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - \alpha(X,Y) &= \bar{\nabla}_X Y - c\langle \alpha(X,Y), \vec{p}\rangle \vec{p} \\ &= \bar{\nabla}_X Y - c\langle \mathcal{A}_{\vec{p}} X, Y\rangle \vec{p} \\ &= \bar{\nabla}_X Y + c\langle X, Y\rangle \vec{p}.\end{aligned}$$

Outro fato a ser observado é que: Para o caso de acontecer $\langle \eta, \eta\rangle = -1$, fazendo as mesmas contas da prova da equação de Gauss, mas com a observação que aparecerá um sinal trocado na segunda parcela da equação (2.49), obteremos

$$K_{ij} - \bar{K}_{ij} = -\lambda_i \lambda_j.$$

Em particular, a curvatura seccional de $\mathbb{M}^n(c) \subset \mathbb{R}^{n+1}_\tau$ é constante igual a $c$.

**Definição 2.17.** *Um referencial ortonormal* $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}\}$ *em uma vizinhança* $\bar{U} \subset \bar{M}$ *de* $p$ *é adaptado à imersão* $F$ *quando restritos a* $M$ *os campos de vetores* $e_1, \ldots, e_n$ *são tangentes a* $M$ *e os campos de vetores* $e_{n+1}, \ldots, e_{n+m}$ *são normais a* $M$ *ao longo de* $\bar{U} \cap \bar{M}$.

Para o que segue, $\nabla$, $\Delta$ e $\nabla^2$ denotarão o gradiente, o laplaciano e o hessiano calculados na métrica de $M$, enquanto que $\bar{\nabla}$, $\bar{\Delta}$ e $\bar{\nabla}^2$ os respectivos entes calculados na métrica de $\bar{M}$.

**Lema 2.3.** *Seja* $F : M^n \to \bar{M}^{n+1}$ *uma imersão isométrica. Se* $f : \bar{M} \to \mathbb{R}$ *é uma função diferenciável, então em cada* $p \in M$*, vale:*

1. $\bar{\nabla} f = \nabla f + f_\nu \nu$;
2. $\bar{\Delta} f = \Delta f - nH f_\nu + \bar{\nabla}^2 f(\nu, \nu)$;
3. $\frac{1}{2}\langle \bar{\nabla} |\bar{\nabla} f|^2, \nu\rangle = \bar{\nabla}^2 f(\nu, \bar{\nabla} f)$,

*onde* $\nu$ *é um campo de vetores unitários normais a* $M$ *em uma vizinhança de* $p$*,* $H$ *é a função curvatura média da imersão com respeito a* $\nu$ *e* $f_\nu = \nu(f)$.

*Demonstração.* Seja $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1} = \nu\}$ um referencial ortonormal local adaptado a $U \subset M$. Para todo $p \in U$ vale:

$$\bar{\nabla} f = \sum_{i=1}^{n+1} e_i(f) e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i(f) e_i + \nu(f)\nu = \nabla f + f_\nu \nu,$$

o que prova o primeiro item. Para o segundo, basta fazer a conta seguinte

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta} f &= \sum_{i=1}^{n+1}\big(e_i(e_i(f)) - (\bar{\nabla}_{e_i}e_i)(f)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(e_i(e_i(f)) - \nabla_{e_i}e_i(f) - \alpha(e_i,e_i)(f)\big) + \nu(\nu(f)) - (\bar{\nabla}_\nu \nu)(f)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(e_i(e_i(f)) - \nabla_{e_i}e_i(f)\big) - \sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i,e_i)(f) + \bar{\nabla}^2 f(\nu,\nu)\\
&= \Delta f - n\mathbf{H}(f) + \bar{\nabla}^2 f(\nu,\nu)\\
&= \Delta f - nHf_\nu + \bar{\nabla}^2 f(\nu,\nu).
\end{aligned}$$

O terceiro item é um fato mais geral conforme equação (2.26). Façamos a prova deste caso particular:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\langle\bar{\nabla}|\bar{\nabla} f|^2,\nu\rangle &= \frac{1}{2}\langle\sum_{i=1}^{n+1} e_i(|\bar{\nabla} f|^2)e_i,\nu\rangle = \frac{1}{2}\nu(|\bar{\nabla} f|^2)\\
&= \frac{1}{2}\nu\langle\bar{\nabla} f,\bar{\nabla} f\rangle = \langle\bar{\nabla}\nu\bar{\nabla} f,\bar{\nabla} f\rangle = \bar{\nabla}^2 f(\nu,\bar{\nabla} f).
\end{aligned}$$

□

**Proposição 2.6.** *Seja $F : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade compacta $M^n$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. Então existe um ponto $q_0 \in M^n$ e um vetor normal $\nu \in T_{q_0}M^\perp$ tais que $\mathcal{A}_\nu(q_0)$ é positivo definido.*

*Demonstração.* Seja $h : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, dada por

$$h(p) = \frac{1}{2}||\vec{p}||^2.$$

Como $M$ é compacta, a função $h$ assume seu valor máximo em algum ponto $q_0 \in M$ e assim,

$$0 = X(h)(q_0) = \langle\bar{\nabla}_X\vec{q_0},\vec{q_0}\rangle = \langle X(q_0),\vec{q_0}\rangle, \ \ \forall X \in T_{q_0}M,$$

ou seja, o vetor posição $\vec{q_0}$ é normal $M$ em $q_0$. Além disso,

$$0 \geq XX(h)(q_0) = \langle\bar{\nabla}_X X,\vec{q_0}\rangle + ||X(q_0)||^2 = \langle\alpha(X,X),\vec{q_0}\rangle + ||X(q_0)||^2.$$

Então para $\nu = -\vec{q_0}$, temos

$$\langle\mathcal{A}_\nu X, X\rangle \geq ||X||^2, \ \ \forall X \in T_{q_0}M.$$

□

# Capítulo 3

# Método de Perron

Neste capítulo provaremos a existência e a unicidade da solução do problema de Dirichlet para a equação de Poisson.

## 3.1 Método de Perron

**Definição 3.1.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio (aberto e conexo) e $u \in C^2(\Omega)$. A equação homogênea*

$$\Delta u = 0$$

*onde $\Delta$ é o operador laplaciano, é chamada equação de Laplace.*

*A equação de Laplace não-homogênea é chamada equação de Poisson:*

$$\Delta u = f$$

*onde $f$ está no conjunto das funções contínuas em $\Omega$, cuja notação clássica é $C^0(\Omega)$.*

**Definição 3.2.** *Uma função $u \in C^2(\Omega)$ é harmônica em $\Omega$ se satisfaz a equação*

$$\Delta u = 0$$

- *Se $\Delta u(x) \geq 0$ em $\Omega$, dizemos que $u$ é subharmônica.*
- *Se $\Delta u(x) \leq 0$ em $\Omega$, dizemos que $u$ é superharmônica.*

Agora vamos generalizar o conceito de função subharmônica e superharmônica para o caso em que $u \in C^0(\Omega)$.

**Definição 3.3.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio. Uma função $u \in C^0(\Omega)$ será dita subharmônica (respectivamente superharmônica) em $\Omega$, se para toda bola $B \subset\subset \Omega$ (isto é, o fecho de $B$ é compacto e está contido em $\Omega$) e toda função harmônica $h$ em $B$, satisfazendo $u \leq h (u \geq h)$ em $\partial B$, tivermos também $u \leq h(u \geq h)$ em $B$.*

Citaremos agora um problema relacionado com a equação de Laplace.

**Problema de Dirichlet** para a equação de Laplace: Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $g \in C^0(\partial\Omega)$, o problema consiste em encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que

$$(D) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Definimos também o problema de Dirichlet para a equação de Poisson de maneira análoga: Dada uma função $f \in C^0(\Omega)$ e uma função $g \in C^0(\partial\Omega)$, o problema consiste em encontrar uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que satisfaça

$$(P) \begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Teorema 3.1** (Propriedade da Média)**.** *Seja $u \in C^2(\Omega)$ harmônica. Então para toda bola $B_r(x) \subset\subset \Omega$ vale*

$$u(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y \tag{3.1}$$

*ou equivalentemente*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy \tag{3.2}$$

*onde $\omega_n$ é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.*

*Demonstração.* Defina a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(r) := \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um aberto tal que $x + rz \in \Omega \quad \forall z \in \partial B(0,1)$ e $r \in I$. Inicialmente vamos mostrar que $\varphi$ não depende do raio $r$, para isso será conveniente calcular $\varphi'$. Ora, lembrando que $\partial B(0,1) = \{z \in \mathbb{R}^n; |z| = 1\}$, considere a seguinte a aplicação:

$$\begin{aligned} h :\ \partial B(0,1) &\longrightarrow \partial B(x,r) \\ z &\longmapsto x + rz = y \end{aligned}$$

Observe que $dh = rId_{\partial B(0,1)}$. Logo, $h$ é um difeomorfismo com jacobiano igual a $r^{n-1}$ e $\partial B(x,r) = h(\partial B(0,1))$. Utilizando o teorema de mudança de variáveis para integrais temos:

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y = \int_{h(\partial B(0,1))} u(y)\, dS_y = \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz) r^{n-1}\, dS_z.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz) r^{n-1}\, dS_z \\
&= \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS_z.
\end{aligned}$$

Derivando com respeito a $r$, temos pelo teorema da convergência dominada e pela regra da cadeia,

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z\, dS_z.$$

Analogamente ao que fizemos na definição de $h$ podemos retornar ao $\partial B(x,r)$ para escrever

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \left( \frac{y-x}{r} \right)\, dS_y.$$

Agora vamos notar que o normal exterior unitário no ponto $y \in \partial B(x,r)$ é exatamente $\nu = \frac{y-x}{r}$. Então, pelo teorema da divergência

$$\varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \nu dS_y = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy = 0. \tag{3.3}$$

Donde $\varphi(r) = cte$, $\forall B(x,r) \subset\subset \Omega$. Assim,

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} u(x+tz)\, dS_z \\
&= \frac{1}{n\omega_n}\, u(x) \int_{\partial B(0,1)} dS_z = \frac{1}{n\omega_n}\, u(x) n\omega_n = u(x).
\end{aligned}$$

Utilizando coordenadas polares, teremos

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} u(y)\, dy &= \int_0^r \int_{\partial B(x,s)} u(y)\, dS_y\, ds = \int_0^r \varphi(s) n\omega_n s^{n-1}\, ds \\
&= \int_0^r u(x) n\omega_n s^{n-1}\, ds = u(x) n\omega_n \frac{r^n}{n} = u(x)\omega_n r^n.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy.$$

$\square$

**Observação 3.1.** *Para o caso de funções $u \in C^2(\Omega)$ subharmônicas (superharmônicas), a propriedade da média é descrita como segue: para toda bola $B_r(x) \subset\subset \Omega$ vale*

$$u(x) \leq (\geq) \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y$$

*ou equivalentemente*

$$u(x) \leq (\geq) \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy.$$

*De fato, basta considerar a equação (3.3), um argumento de monotonicidade e continuidade para obtermos as devidas desigualdades nas equações anteriores.*

**Teorema 3.2.** *Se $u \in C^2(\Omega)$ satisfaz a propriedade da média em $\Omega$, então $u$ é harmônica.*

*Demonstração.* Suponha, por absurdo, que $u$ satisfaça a propriedade da média em $\Omega$ mas não seja harmônica. Então existe $x \in \Omega$ tal que $\Delta u(x) \neq 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $\Delta u(x) > 0$. Como $u \in C^2(\Omega)$, o laplaciano de $u$ é uma função contínua. Logo, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset\subset \Omega$ e $\Delta u(x) > 0$ em $B(x,r)$. De acordo com o Teorema 3.1,

$$\varphi(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y = u(x)$$

e pela equação (3.3)

$$0 = \varphi'(r) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy \; > \; 0,$$

o que é absurdo. Portanto, $\Delta u = 0$. □

**Teorema 3.3.** *Princípio do Máximo (Mínimo) Forte. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma função subharmônica (superharmônica) em $\Omega$ e suponha que exista $y \in \Omega$ tal que*

$$u(y) = \sup_{\Omega} u \; (\inf_{\Omega} u).$$

*Então $u$ é contante. Consequentemente uma função harmônica não pode assumir valor máximo (ou mínimo) em um ponto do interior de $\Omega$, a menos que ela seja constante.*

*Demonstração.* Provaremos o teorema para $u$ subharmônica. A prova para funções superharmônicas é análoga. Considere o conjunto

$$\Phi = \{x \in \Omega : u(x) = \sup_{\Omega} u = A\}.$$

Temos que $\Phi \neq 0$, pois $y \in \Phi$. Além disso, $\Phi$ é fechado em $\Omega$, pois $\Phi = u^{-1}(\{A\})$. Ademais, $\Phi$ é aberto em $\Omega$. Com efeito, seja $x_0 \in \Phi$ e $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$. Então,

$$\begin{aligned} A &= u(x_0) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)\, dy \leq \frac{A}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} dy \\ &= \frac{Ar^n}{\omega_n r^n} \int_{B_1(x_0)} dy = A. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} u(y)dy = A \Rightarrow \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x_0)} (u(y) - A)dy = 0.$$

Mas $u(y) - A \leq 0, \forall y \in B_r(x_0)$. Logo, $u \equiv A$ em $B_r(x_0)$ e, portanto, $B_r(x_0) \subset \Phi$. Consequentemente, $\Phi \neq \emptyset$ é aberto e fechado no conjunto conexo $\Omega$, donde $\Phi = \Omega$, ou seja, $u = cte$. □

**Teorema 3.4.** *Princípio do Máximo (Mínimo) Fraco. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e seja $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ uma função subharmônica (superharmônica) em $\Omega$. Então desde que $\Omega$ seja limitado, temos*

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \ (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u),$$

*consequentemente, segue que*

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u, \ \textit{para todo } x \in \Omega.$$

*Demonstração.* Segue imediatamente do princípio do máximo (mínimo) forte, uma vez que, sendo $\Omega$ limitado teremos $\overline{\Omega}$ compacto e portanto $u \in C^0(\overline{\Omega})$ atinge um máximo e um mínimo, os quais devem ser atingidos no $\partial\Omega$, a menos que $u$ seja constante. □

**Teorema 3.5.** *Sejam $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ satisfazendo $\Delta u = \Delta v$ em $\Omega$ um domínio limitado e $u = v$ em $\partial\Omega$. Então $u = v$ em $\Omega$.*

*Demonstração.* Defina $w = u - v$. Assim, temos

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega \\ w = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{e} \ \ w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}).$$

Pelo teorema anterior,

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w(x) \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w(x) = 0, \ x \in \Omega.$$

Isto é, $u = v$ em $\Omega$. □

**Corolário 3.1** (Unicidade do Problema de Dirichlet)**.** *Sejam $g \in C^0(\partial\Omega)$ e $f \in C^0(\Omega)$. Se existe uma solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ do problema*

$$(\underline{P}) \begin{cases} \Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

*Então ela é única.*

*Demonstração.* Suponhamos que existam $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluções de ($\underline{\text{P}}$). Definimos $u = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Então

$$\begin{cases} \Delta u = f - f = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo princínpio do Máximo e do Mínimo,

$$u \leq \sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u = 0 \quad \text{e} \quad u \geq \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u = 0.$$

Logo, $u = 0$ em $\Omega$, o que prova a unicidade. □

**Corolário 3.2.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \quad \text{com } g \geq 0. \end{cases}$$

*Se existe $x \in \partial\Omega$ tal que $g(x) > 0$ então $u > 0$ em $\Omega$.*

*Demonstração.* Pelo princípio do máximo, como $u$ é harmônica,

$$\inf_{\partial\Omega} u(x) \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u(x), \forall x \in \Omega.$$

Por outro lado, $u = g \geq 0$ em $\partial\Omega$. Assim, $u(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$. Agora, suponhamos que exista $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 0$. Então, a função $u$ atingiria o mínimo em $\Omega$, logo seria constante. Como $u(x_0) = 0$, segue que $u \equiv 0$, o que é absurdo. □

**Observação 3.2.** *Um outro resultado que obtemos a partir do princípio do máximo é que se $u$ é subharmônica no sentido clássico, isto é, $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \geq 0$, então $u$ é subharmônica no sentido da Definição 3.3. Com efeito, seja $B \subset\subset \Omega$ e $h$ uma função tal que*

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ u \leq h & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

*Então a função $w := u - h$ satisfaz: $\Delta w \geq 0$ em $B$ e $w \leq 0$ em $\partial B$. Segue do princípio do Máximo Fraco que $w \leq 0$ em $B$, isto é, $u \leq h$ em $B$.*

Esta mesma observação vale para funções superharmônicas. A prova é feita de maneira análoga.

As propriedades a seguir serão provadas apenas para as funções subharmônicas (no sentido da Definição 3.3), pois a prova para as funções superharmônicas é análoga. Além disso, segundo a observação anterior, tais propriedades serão trivialmente verificadas para as funções subharmônicas (superharmônicas) no sentido clássico.

**P1)** Se $u$ é subharmônica então $-u$ é superharmônica.

*Demonstração.* Devemos provar que para toda bola $B \subset\subset \Omega$ e qualquer função $h$ tal que

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ -u \geq h & \text{em } \partial B, \end{cases}$$

implica $-u \geq h$ em $B$. Com efeito, $\Delta h = \Delta(-h) = 0$. Como $u$ é subharmônica,

$$\begin{cases} \Delta(-h) = 0 & \text{em } B \\ u \leq -h & \text{em } \partial B \end{cases} \Rightarrow u \leq -h \text{ em } B \Rightarrow -u \geq h \text{ em } B.$$

□

**P2)** Se $u$ e $v$ são subharmônicas em $\Omega$, então $u + v$ é subharmônica em $\Omega$.

*Demonstração.* Devemos provar que para todo $B \subset\subset \Omega$ e uma função $h$ qualquer satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ u + v \leq h & \text{em } \partial B \end{cases}, \text{ tem-se } u + v \leq h \text{ em } B.$$

Com efeito, seja $w$ solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } B \\ u = w & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Como $u$ é subharmônica, temos $u \leq w$ em $B$ e como $u = w$ em $\partial B$ teremos

$$\begin{cases} \Delta(h - w) = 0 & \text{em } B \\ w + v \leq h & \text{em } \partial B \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \Delta(h-w)=0 & \text{em } B \\ v \leq h-w & \text{em } \partial B \end{cases} \Rightarrow v \leq h-w \text{ em } B$$

pois $v$ é subharmônica. Como $u \leq w$ em $B$ e $v \leq h-w$ em $B$, segue que $u+v \leq h$ em $B$. $\square$

**P3)** As funções subharmônicas verificam a Propriedade da Média. Em particular, elas verificam o Princípio do Máximo.

*Demonstração.* Sejam $u \in C^0(\Omega)$ uma função subharmônica, $x \in \Omega$, $B(x,r) \subset\subset \Omega$ e $h$ uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta h=0 & \text{em } B(x,r) \\ u=h & \text{em } \partial B(x,r) \end{cases} \Rightarrow u \leq h \text{ em } B(x,r).$$

Então,

$$u(x) \leq h(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} h(y)dS_y = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)dS_y.$$

Em particular, elas verificam o Princípio do Máximo, pois na prova deste último fato só precisávamos da Propriedade da Média e da continuidade da $u$. $\square$

**P4)** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $u, v \in C^0(\Omega)$, onde $u$ é subharmônica e $v$ é superharmônica em $\Omega$ tal que $u \leq v$ em $\partial\Omega$. Então $u \leq v$ em $\Omega$. Em particular, segue do Corolário 3.2, que ou $u < v$ em $\Omega$, ou $u = v$ em $\Omega$.

*Demonstração.* Utilizando as propriedades $(P1)$ e $(P2)$, temos que $-v$ e $u+(-v)$ são funções subharmônicas em $\Omega$. Como por hipótese $u-v \leq 0$ em $\partial\Omega$, fazendo $w = u-v$, temos pelo Princípio do Máximo que

$$\sup_{\Omega} w = \sup_{\partial\Omega} w \leq 0 \Rightarrow u-v \leq 0 \text{ em } \Omega,$$

ou seja, $u \leq v$ em $\Omega$. $\square$

**P5)** Se $u_1, \ldots, u_n$ são funções subharmônicas em $\Omega$ então a função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(x) = \max_{1 \leq i \leq n} u_i(x)$$

é subharmônica em $\Omega$.

*Demonstração.* Observe que $u_i \in C^0(\Omega) \Rightarrow u \in C^0(\Omega)$.

Seja $B \subset\subset \Omega$ e $h$ satisfazendo

$$(*) \begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ u \le h & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

Devemos mostrar que $(*) \Rightarrow u \le h$ em $B$. Com efeito, como para todo $i$, $u_i \le u$, temos

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B \\ u_i \le h & \text{em } \partial B \end{cases} \Rightarrow u_i \le h \text{ em } B.$$

Logo, $u = \max u_i \le h$ em $B$. □

**P6)** O limite de uma sequência uniformemente convergente de funções harmônicas é harmônica.

*Demonstração.* Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções harmônicas em $\Omega$ convergindo para $u$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para toda bola $B_r(x) \subset\subset \Omega$,

$$u_k(x) = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u_k(y) dS_y.$$

Usando o fato de que a convergência $u_k \to u$ é uniforme,

$$\begin{aligned} u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) &= \lim_{k\to\infty} \left( \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u_k(y) dS_y \right) \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \lim_{k\to\infty} u_k(y) dS_y \\ &= \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS_y. \end{aligned}$$

Logo, $u$ satisfaz a propriedade da média, segue do Teorema 3.2 que $u$ é harmônica. □

Continuando, vamos provar o seguinte fato: o operador laplaciano é invariante por translação e rotação. De fato, basta provar que se $v(x) = u(R(x))$, onde $R$ é uma transformação linear ortogonal em $\mathbb{R}^n$, então $\Delta v(x) = \Delta u(R(x))$. Vejamos: Primeiro vamos escrever

$$R(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x)),$$

onde $y_1 = \sum_j a_{1j}x_j, \ldots, y_n = \sum_j a_{nj}x_j$ e $(a_{ij})$ é a matriz de $R$ na base canônica do $\mathbb{R}^n$. Segue que $v(x) = u(y_1(x), \ldots, y_n(x))$, de modo que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) &= \sum_k a_{ki}\frac{\partial u}{\partial y_k}(R(x)),\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) &= \sum_{k,j} a_{ki}a_{ji}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}(R(x)).
\end{aligned}$$

Como $R$ é uma transformação linear ortogonal, vamos ter $\delta_{kj} = \sum_i a_{ki}(a_{ij})^t$. Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) &= \sum_i \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x) = \sum_{k,j}\sum_i a_{ki}(a_{ij})^t \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}(R(x))\\
&= \sum_{k,j} \delta_{kj}\frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}(R(x)) = \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2}(R(x)) = \Delta u(R(x)).
\end{aligned}$$

Como havíamos afirmado. Sendo assim, para analisarmos a equação $\Delta u = 0$ nos interessa supor que $u$ é radial (isto é que só dependa de $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$). Veremos agora que a solução de Laplace possui uma solução radial. Para isso, seja $u(x) = v(|x|) = v(r)$, então

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{|x|} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x_j^2} = \frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}.$$

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} = v'\frac{x_j}{|x|} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = v''\frac{x_j^2}{r^2} + v'(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3}).$$

Donde

$$\Delta u = v'' + n\frac{v'}{r} - \frac{v'}{r} = v'' + \frac{(n-1)}{r}v'.$$

Fazendo $w = v'$, temos

$$w' + \frac{(n-1)}{r}w = 0.$$

Integrando em $r$, obtemos $w = cr^{(1-n)}$. Assim, podemos escrever

$$v(r) = \begin{cases} a\ \ln r + c, & \text{se } n = 2\\ b\, r^{2-n} + d, & \text{se } n \geq 3 \end{cases},$$

onde $a, b, c, d$ são constantes.

Mais geralmente, fixando $y \in \mathbb{R}$ e sendo $r = |x - y|$, teremos

$$v(|x-y|) = \begin{cases} a\ \ln|x+y| + c, & \text{se } n = 2\\ b\,|x+y|^{2-n} + d, & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

**Definição 3.4.** *A função*

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n}\,|x-y|^{2-n}, & se\ n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi}\,\log|x-y|, & se\ n = 2 \end{cases}$$

*definida para $x \neq y$ ($y \in \Omega$ fixado) é a Solução Fundamental da Equação de Laplace.*

**Observação 3.3.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio onde vale o teorema da divergência e $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Então*

$$\begin{aligned} \int_\Omega (v\Delta u + \langle \nabla u, \nabla v\rangle)dx &= \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} dS, \\ \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)dx &= \int_{\partial\Omega} \big(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\big) dS, \end{aligned}$$

*onde $\nu$ denota a normal exterior unitária em $\partial\Omega$, $dx$ o elemento de volume de $\Omega$ e $dS$ o elemento de área de $\partial\Omega$.*

Dada uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ queremos obter uma expressão para $u(y)$ em termos da solução fundamental $\Gamma(x-y)$ onde $y \in \Omega$ é um ponto arbitrário.

Como $\Delta\Gamma = 0$ para $x \neq y$, a singularidade em $x = y$ nos impede de usarmos diretamente $\Gamma$ no lugar de $v$ na segunda identidade de Green. Para superarmos esta dificuldade, aplicaremos a segunda identidade de Green na região $\Omega \backslash \overline{B}_\varepsilon(y)$, onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que $B_\varepsilon(y) \subset\subset \Omega$. Assim,

$$\int_{\Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(y)} \big(\Gamma\Delta u - u\Delta\Gamma\big) dx = \int_{\partial(\Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(y))} \Big(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\Big)\, dS.$$

Como $\partial(\Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(y)) = \partial\Omega \cup \partial\overline{B}_\varepsilon(y)$ e $\Gamma$ é harmônica em $\Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(y)$, segue que

$$\int_{\Omega\backslash\overline{B}_\varepsilon(y)} \Gamma\Delta u\ dx = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)\, dS + \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}\right)\, dS. \tag{3.4}$$

Agora, olhando apenas para a última integral e observando que o vetor normal unitário é dado por $\nu = \frac{x-y}{|x-y|}$, temos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS\right| = \left|\Gamma(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS\right| &\leq |\Gamma(\varepsilon)| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| dS \\ &= |\Gamma(\varepsilon)| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} |\langle \nabla u, \nu\rangle|\, dS \\ &\leq |\Gamma(\varepsilon)| \sup_{B_\varepsilon(y)} |\nabla u| \int_{\partial B_\varepsilon(y)} dS \\ &= n\omega_n \varepsilon^{n-1} |\Gamma(\varepsilon)| \sup_{B_\varepsilon(y)} |\nabla u|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS\right| \to 0 \quad (\text{quando } \varepsilon \to 0).$$

Além disso, para o caso $n \geq 3$ (o caso $n = 2$ é análogo) note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) &= \sum_i \partial_i \Gamma \nu_i = \sum_i \frac{1}{n\omega_n}|x-y|^{-n}(x_i-y_i)\frac{(x_i-y_i)}{\varepsilon} \\
&= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}|x-y|^{-n}\sum_i (x_i-y_i)^2 = \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}|x-y|^{-n}\cdot|x-y|^2 \\
&= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}|x-y|^{-n+2}.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando o Teorema 3.1,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)\, dS &= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u|x-y|^{-n+2}\, dS \\
&= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\varepsilon^{-n+2}\, dS \\
&= \frac{1}{n\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(y)} u\, dS \;=\; u(y).
\end{aligned}$$

Portanto, tomando o limite quando $\varepsilon$ tende pra zero em (3.4), concluímos que

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y)\right) dS - \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u\, dx \tag{3.5}$$

que é conhecida como *fórmula de representação de Green.*

**Observação 3.4.** *Note que se $u$ for harmônica em $\Omega$, temos a seguinte representação*

$$u(y) = -\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}\Gamma(x-y)\right) dS$$

*e se $u$ possuir suporte compacto em $\Omega$, então* (3.5) *resultará em*

$$u(y) = -\int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u\, dx$$

**Definição 3.5** (Potencial Newtoniano com densidade $f$)**.** *Para uma função integrável $f$, a integral*

$$u(y) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f\, dx$$

*é o potencial newtoniano de $f$. Note que se $f \in C_0^\infty(\Omega)$, de acordo com (3.5) a solução da equação de Poisson $-\Delta u = f$ deve ser o potencial Newtoniano de $f$. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções suaves com suporte compacto em $\Omega$.*

Os dois teoremas a seguir serão úteis apenas para justificar provas posteriores e as demonstrações podem ser encontradas em [21].

**Teorema 3.6.** *Qualquer sequência limitada de funções harmônicas em um domínio $\Omega$ contém uma subsequência convergindo uniformemente em subdomínios compactos de $\Omega$ para uma função harmônica em $\Omega$.*

**Teorema 3.7.** *Seja $B = B_R(0)$ e $\varphi$ uma função contínua em $\partial\Omega$. Então a função $u$ definida por*

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^n}\, dS_y & \text{se } x \in B \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \partial B \end{cases}$$

*pertence a $C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ e satisfaz $\Delta u = 0$ em $B$.*

Sendo assim, faz sentido considerar a definição seguinte.

**Definição 3.6** (levantamento harmônico)**.** *Sejam $u$ subharmônica em $\Omega$, $B \subset\subset \Omega$ uma bola qualquer e $\overline{u}$ uma solução do problema de Dirichlet, tal que*

$$\begin{cases} \Delta\overline{u} = 0 & \text{em } B \\ \overline{u} = u & \text{em } \partial B. \end{cases}$$

*Definimos o levantamento harmônico de $u$ em $\Omega$ com relação a $B$ por*

$$U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B \\ u(x), & x \in \Omega\backslash B. \end{cases}$$

**Observação 3.5.** *Note que $u \leq U$ em $\Omega$, pois $U = u$ em $\Omega\backslash B$ e como $u$ é subharmônica, segue que* $\begin{cases} \Delta\overline{u} = 0 & \text{em } B \\ u = \overline{u} & \text{em } \partial B \end{cases} \Rightarrow u \leq \overline{u} = U$ *em $B$.*

**Proposição 3.1.** *O levantamento harmônico de uma função subharmônica é uma função subharmônica.*

*Demonstração.* Sejam $U$ o levantamento harmônico de uma função subharmônica $u$ em $\Omega$ com relação a $B$. Considere $B' \subset\subset \Omega$ e $h$ uma função satisfazendo

$$(*) \begin{cases} \Delta h = 0 & \text{em } B' \\ U \leq h & \text{em } \partial B'. \end{cases}$$

Precisamos provar que $U \leq h$ em $B'$. De fato, para:

1. $B' \cap B = \emptyset$, temos: $U = u$ em $B'$ e pela subharmonicidade de $u$ em $\Omega$, segue que $U \leq h$ em $B'$.

2. $B' \cap B \neq \emptyset$, temos as seguintes possibilidades:

   $(i)$ $B' \subset B$. Dessa forma, $U = \overline{u}$ que é harmônica em $B$ e, portanto, subharmônica em $B$. Logo, $U \leq h$ em $B'$.

   $(ii)$ $B' \not\subset B$. Pela Observação 3.5 e por $(*)$, temos que $u \leq U$ em $\Omega$ que implica $u \leq h$ em $\partial B'$ e como $u$ é subharmônica em $\Omega$, $u \leq h$ em $B'$. Como $U = u$ em $\Omega \backslash B$ temos que $U \leq h$ em $B' \backslash B$ e como $U$ é harmônica em $B$ temos que $U$ é harmônica $B \cap B'$. Assim, $\begin{cases} \Delta U = 0 & \text{em } B \cap B' \\ U \leq h & \text{em } \partial(B \cap B') \end{cases} \Rightarrow U \leq h$ em $B \cap B'$,

   onde a última implicação é decorrente do princípio do máximo.

□

**Definição 3.7.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $\varphi$ uma função limitada em $\partial\Omega$. Uma função $u \in C^0(\overline{\Omega})$ subharmônica (respectivamente superharmônica) em $\Omega$ é chamada subfunção (respect. superfunção) com relação a $\varphi$, se $u \leq \varphi$ (respect. $u \geq \varphi$) em $\partial\Omega$.*

**Observação 3.6.** *Denotamos por $S_\varphi$ o conjunto das subfunções com relação a $\varphi$, isto é,*

$$S_\varphi = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : u \text{ é subharmônica em } \Omega \text{ e } u \leq \varphi \text{ em } \partial\Omega\}.$$

*Observe que este conjunto é não vazio, pois como $\varphi$ é limitada, digamos, $m \leq \varphi(x) \leq M, \forall x \in \partial\Omega$, basta tomarmos $u(x) = m$, $\forall x \in \Omega$.*

**Proposição 3.2.** *Toda subfunção com relação a $\varphi$ é menor do que ou igual a qualquer superfunção com relação a $\varphi$.*

*Demonstração.* Seja $u \in C^0(\overline{\Omega})$ uma subfunção com relação a $\varphi$, isto é, $u$ é subharmônica em $\Omega$ e $u \leq \varphi$ em $\partial\Omega$ e seja $v \in C^0(\overline{\Omega})$ uma superfunção com relação a $\varphi$, i.e., $v$ é superharmônica em $\Omega$ e $v \geq \varphi$ em $\partial\Omega$. Defina $w := u - v$. Assim, temos que $w$ é subharmônica em $\Omega$ e $u - v \leq 0$ em $\partial\Omega$. Pelo princípio do máximo, $u \leq v$ em $\Omega$. □

**Definição 3.8** (Função de Perron)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Defina $u : \Omega \to \mathbb{R}$ por*

$$u(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x)$$

*que é conhecida como função de Perron.*

**Teorema 3.8.** *A função de Perron é harmônica em $\Omega$.*

*Demonstração.* Inicialmente afirmamos que $u$ está bem definida. Com efeito, para qualquer $v \in S_\varphi$ vale o princípio do máximo, logo

$$v(x) \le \sup_\Omega v = \sup_{\partial\Omega} v \le \sup_{\partial\Omega} \varphi = M \quad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall v \in S_\varphi$$

isto é, $u(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \Omega$. Logo, $u$ está bem definida.

Agora, mostraremos que $u$ é harmônica em $\Omega$. Seja $y \in \Omega$ fixo. Como $u(y) = \sup\limits_{v \in S_\varphi} v(y)$, então existe uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $S_\varphi$ tal que $v_n(y) \to u(y)$.

Trocando, se necessário, $v_n$ por $v_n' = \max\{v_n, m = \inf\limits_{\partial\Omega} \varphi\}$ ainda temos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e $v_n \in S_\varphi$ (pois tanto $v_n$ quanto $\inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$ estão em $S_\varphi$). Além disso, como $v_n(y) \le v_n'(y) \le u(y)$, temos $v_n'(y) \to u(y)$.

Escolhendo $R > 0$ de modo que $B = B_R(y) \subset\subset \Omega$ e definindo para cada $n \in \mathbb{N}$, o levantamento harmônico de $v_n'$ em $B$, isto é,

$$V_n(x) = \begin{cases} \overline{v_n'}(x), & x \in B \\ v_n'(x), & x \in \Omega\backslash B \end{cases}$$

Temos que

- $V_n \in S_\varphi$, pois $V_n$ é subharmônica em $\Omega$ e $V_n = v_n'$ em $\partial\Omega$.
- $V_n(y) \to u(y)$, pois $v_n'(y) \le V_n(y) \le \sup\limits_{v\in S_\varphi} v(y) = u(y), \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $v_n'(y) \to u(y)$ para cada $y \in \Omega$.

Como $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e $V_n$ é harmônica em $B$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pelo Teorema 3.6 temos que a sequência $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contém uma subsequência $(V_{n_k})$ convergindo uniformemente em qualquer bola $\overline{B}_\rho(y)$ com $\rho < R$, para uma função $\widetilde{v}$ que é harmônica em $\overline{B}_\rho(y)$. Então $\widetilde{v}(y) = u(y)$ (unicidade do limite) e $\widetilde{v} \le u$ em $B_\rho(y)$, pois $V_{n_k}(x) \le \sup\limits_{v\in S_\varphi} v(x) = u(x) \Rightarrow \lim V_{n_k} \le u$ para $k$ suficientemente grande.

Afirmamos que: $\widetilde{v} = u$ em $B_\rho(y)$, isto é, $u$ será harmônica em $B_\rho(y)$ e provará o teorema. Com efeito, suponha, por absurdo, que $\widetilde{v}(z) < u(z)$ para algum $z \in B_\rho(y)$. Então, como $u$ é definida pelo supremo, existe $\widetilde{u} \in S_\varphi$ tal que $\widetilde{v}(z) < \widetilde{u}(z) \le u(z)$.

Definindo $w_k := \max\{\widetilde{u}, V_{n_k}\}$ e considerando o seu levantamento harmônico em $B_\rho(y)$, isto é,

$$W_k(x) = \begin{cases} \overline{w_k}(x), & x \in B_\rho(y) \\ w_k(x), & x \in \Omega \backslash B_\rho(y) \end{cases}$$

temos que $W_k \in S_\varphi$ e, como antes, obtemos uma subsequência de $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo uniformemente em $\overline{B}_r(y)$ $(\forall r < \rho)$, para uma função $w$ que é harmônica em $\overline{B}_r(y)$.

Escolhendo $r \in (0, \rho)$ tal que $z \in \overline{B}_r(y)$ e observando que $V_{n_k} \leq w_k \leq W_k \leq \sup\limits_{v \in S_\varphi} v = u$ $\forall k \in \mathbb{N}$ chegamos a $\widetilde{v} \leq w \leq u$ em $\overline{B}_r(y)$ e $\widetilde{v}(y) \leq w(y) \leq u(y) = \widetilde{v}(y)$, isto é, $\widetilde{v}(y) = w(y)$ e como $\widetilde{v}$ é subharmônica e $w$ é harmônica em $\overline{B}_r(y)$ temos que $\widetilde{v} - w$ é subharmônica em $\overline{B}_r(y)$. Além disso, $\widetilde{v} - w \leq 0$ em $\partial \overline{B}_r(y)$. Então pelo princípio do máximo, concluímos que $\widetilde{v} = w$ em $\overline{B}_r(y)$. Absurdo, pois $\widetilde{v}(z) < \widetilde{u}(z) < w_k(z) \leq W_k(z)$, o que conclui a prova do teorema. □

**Observação 3.7.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Se $w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Dirichlet*

$$(\underline{P}) \begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega \\ w = \varphi & \text{em } \partial\Omega, \quad \varphi \in C^0(\partial\Omega) \end{cases}$$

*Então $w$ é a função de Perron. Com efeito, seja $v \in S_\varphi$. Por $(\underline{P})$ temos que $w \in S_\varphi$ e $v - w$ é uma função subharmônica em $\Omega$. Como $v - w \leq \varphi - \varphi = 0$ em $\partial\Omega$, pelo princípio do máximo, $v - w \leq 0$ em $\Omega$. Logo, $\sup\limits_{S_\varphi} v \leq w$ e uma vez que $w \in S_\varphi$ segue que $\sup\limits_{S_\varphi} v = w$.*

O próximo passo é estabelecer condições em $\partial\Omega$ para que a função de Perron seja solução do problema $(\underline{P})$.

**Definição 3.9** (função barreira)**.** *Uma função $w = w_\xi \in C^0(\overline{\Omega})$ é chamada barreira em $\xi \in \partial\Omega$ relativa a $\Omega$ se*

*(i) $w$ é superharmônica em $\Omega$;*

*(ii) $w(x) > 0$ em $\overline{\Omega} \backslash \{\xi\}$ e $w(\xi) = 0$.*

**Definição 3.10** (ponto de fronteira regular)**.** *Diremos que um ponto $x \in \partial\Omega$ é regular se existir uma função barreira neste ponto.*

**Lema 3.1.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $u$ a função de Perron e $\varphi$ uma função limitada em $\partial\Omega$. Se $\varphi$ é contínua em $\xi \in \partial\Omega$ e $\xi$ é regular, então $u(x) \to \varphi(\xi)$ quando $x \to \xi$.*

*Demonstração.* Sejam $\varepsilon > 0$ e $M = \sup\limits_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x)|$. Como $\xi \in \partial\Omega$ é um ponto regular, existe $w \in C^0(\overline{\Omega})$ função barreira em $\xi$. Pela continuidade de $\varphi$ no ponto $\xi$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon \text{ sempre que } x \in B_\delta(\xi).$$

Além disso, considere $m = \min\limits_{\overline{\Omega} \setminus B_\delta(\xi)} w > 0$. Então $w(x) \geq m, \forall x \in \overline{\Omega} \setminus B_\delta(\xi)$. Tomando $k > 0$ tal que $km \geq 2M$, temos que

$$kw(x) \geq 2M \text{ se } |x - \xi| \geq \delta.$$

Agora, considere as funções

$$f(x) = \varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x)$$

definidas em $\overline{\Omega}$. Temos, respectivamente, uma subfunção e uma superfunção com relação a $\varphi$. Provaremos que $f(x)$ é uma subfunção com relação a $\varphi$. Com efeito, seja $B \subset\subset \Omega$ uma bola e $h$ uma função harmônica em $B$ tal que

$$f(x) \leq h(x), \ \forall x \in \partial B,$$

ou seja,

$$-kw(x) \leq h(x) - \varphi(\xi) + \varepsilon, \ \forall x \in \partial B.$$

É imediato que $h(x) - \varphi(\xi) + \varepsilon$ é harmônica em $B$ e como $-kw$ é subharmônica em $\Omega$ (uma vez que $w$ é superharmônica em $\Omega$ e $k > 0$), segue que

$$-kw(x) \leq h(x) - \varphi(\xi) + \varepsilon, \ \ \forall x \in B,$$

isto é, $f(x) \leq h(x), \ \forall x \in B$, o que mostra que $f(x)$ é subharmônica em $\Omega$.

Agora mostraremos que $f(x) \leq \varphi(x), \ \forall x \in \partial\Omega$. Para isso, seja $x_0 \in \partial\Omega$. Precisamos analisar os seguintes casos:

- Se $x_0 \in B_\delta(\xi)$, então para $x_0 = \xi$, $f(\xi) = \varphi(\xi) - \varepsilon - kw(\xi) = \varphi(\xi) - \varepsilon < \varphi(\xi)$. E para $x_0 \neq \xi$, $-\varepsilon < \varphi(x_0) - \varphi(\xi)$. Como $-kw(x_0) < 0$, obtemos $\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x_0) < \varphi(x_0)$, isto é, $f(x_0) < \varphi(x_0)$.

- Se $x_0 \notin B_\delta(\xi)$, sabemos que $kw(x_0) \geq 2M \geq -2\varphi(x_0) \Leftrightarrow -kw(x_0) \leq 2\varphi(x_0)$. Daí concluímos que

$$-\varepsilon - kw(x_0) \leq 2\varphi(x_0).$$

Por outro lado, $kw(x_0) \geq 2M \geq 2\varphi(\xi)$. Consequentemente,

$$-\varepsilon - kw(x_0) \leq -2\varphi(\xi).$$

Somando as duas desigualdades anteriores, obtemos

$$-\varepsilon - kw(x_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(\xi) \Leftrightarrow \varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x_0) \leq \varphi(x_0)$$

isto é, $f(x_0) \leq \varphi(x_0)$. O que conclui a prova de que $f(x)$ é uma subfunção em relação a $\varphi$. A prova de que $g(x)$ é uma superfunção com relação a $\varphi$ segue os passos da demonstração anterior.

Por fim, usando a definição de $u$ e o fato de que toda superfunção domina qualquer subfunção, temos em $\Omega$,

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - kw(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + kw(x),$$

ou equivalentemente,

$$|u(x) - \varphi(\xi)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Como $w(x) \to w(\xi) = 0$ quando $x \to \xi$, (pois $w \in C^0(\overline{\Omega})$), obtemos $u(x) \to \varphi(\xi)$ quando $x \to \xi$. $\square$

**Teorema 3.9.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O problema clássico de Dirichlet*

$$(\underline{P}) \begin{cases} \Delta w = 0 & em\ \Omega \\ w = \varphi & em\ \partial\Omega, \end{cases}$$

*possui solução se, e somente se, todos os pontos do bordo são regulares.*

*Demonstração.* Suponha que todos os pontos de $\partial\Omega$ são regulares. Defina a função $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) = \begin{cases} u(x) & \text{em } \Omega \\ \varphi(x) & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $u$ é a função de Perron. Então $v$ é harmônica em $\Omega$ e como para todo $\xi \in \partial\Omega$, $u(x) \to \varphi(\xi)$ quando $x \to \xi$ segue que $v \in C^0(\overline{\Omega})$ e portanto, $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ é solução de $(\underline{P})$.

Reciprocamente, fixe $\xi \in \partial\Omega$ e suponha que o problema de Dirichlet $(\underline{P})$ tenha uma solução $w$ para $\varphi = \Phi_\xi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, dada por $\Phi_\xi(x) = |x - \xi|$. É imediato que $w$ é uma função barreira em $\xi$. $\square$

Uma condição suficiente para que o problema $(\underline{P})$ tenha solução em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é que $\Omega$ verifique a condição da esfera exterior, isto é, para qualquer $\xi \in \partial\Omega$ existe uma bola $B = B_R(y) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ tal que $\partial B \cap \partial\Omega = \{\xi\}$. Neste caso, a função $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dada por

$$w(x) = \begin{cases} \log \frac{|x-y|}{R} & \text{se } n = 2 \\ R^{2-n} - |x-y|^{2-n} & \text{se } n \geq 3, \end{cases}$$

é uma função barreira com relação a $\Omega$ em $\xi$. De fato,

- $w \in C^0(\overline{\Omega})$, pois $w \in C^2(\mathbb{R}^n \backslash \{y\})$
- $w$ é superharmônica em $\Omega$, pois $w$ é harmônica em $\mathbb{R}^n \backslash \{y\}$.
- Para $x = \xi$ temos $R = |\xi - y|$. Assim,

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2 \\ 0 & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

  ou seja, $w(\xi) = 0$
- Para $x \in \Omega \backslash \{\xi\}$ temos $R < |x - y|$. Assim,

$$\frac{|x-y|}{R} > 1 \;\text{ para }\; n = 2 \;\text{ e }\; |x-y|^{2-n} < R^{2-n} \;\text{ para }\; n \geq 3.$$

Portanto, $w(x) > 0$ em $\Omega \backslash \{\xi\}$, como havíamos afirmado.

**Proposição 3.3.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com bordo de classe $C^2$. Então $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera exterior.*

*Demonstração.* Como $\partial\Omega$ é compacto e de classe $C^2$, vale o teorema da vizinhança tubular para $\partial\Omega$, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(\partial\Omega) = \cup_{p \in \partial\Omega} B_\varepsilon^\perp(p)$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ (chamado de vizinhança tubular de $\partial\Omega$ de raio $\varepsilon$), onde

$$B_\varepsilon^\perp(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - p, v \rangle = 0, \forall v \in T_p(\partial\Omega) \;\text{ com }\; |x - p| < \varepsilon\}.$$

Além disso, se $p \neq q$ em $\partial\Omega$, então $B_\varepsilon^\perp(p) \cap B_\varepsilon^\perp(q) = \emptyset$, e a aplicação $\pi : V_\varepsilon(\partial\Omega) \to \partial\Omega$ que associa a cada $q \in V_\varepsilon(\partial\Omega)$ o pé do único segmento normal que o contém é de classe $C^1$.

Agora, sejam $\eta$ o campo normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e $\xi \in \partial\Omega$. Considere $y = \xi + \frac{\varepsilon}{2}\eta(\xi)$. Afirmamos que $\partial B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap \partial\Omega = \{\xi\}$.

Com efeito, suponha que existe $\overline{\xi} \neq \xi$ tal que $\overline{\xi} \in \partial B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \cap \partial\Omega$. Então

$$y - \overline{\xi} = \frac{\varepsilon}{2}\eta(\overline{\xi}) \quad \text{e} \quad y - \xi = \frac{\varepsilon}{2}\eta(\xi)$$

daí,

$$|y - \overline{\xi}| = \frac{\varepsilon}{2} = |y - \xi|$$

e como $\langle y - \xi, v\rangle = 0 = \langle y - \overline{\xi}, v\rangle, \forall v \in T_\xi\partial\Omega$, segue que $y \in B_\varepsilon^\perp(\xi) \cap B_\varepsilon^\perp(\overline{\xi})$, o que é absurdo. Como $\xi$ é arbitrário concluímos que $\Omega$ verifica a condição da esfera exterior e $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ é a bola procurada. □

**Teorema 3.10** (Existência de Solução para o Problema de Dirichlet da Equação de Poisson)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado cuja fronteira satisfaz a condição da barreira, $f \in C_0^\infty(\Omega)$ e $g \in C^0(\partial\Omega)$. Então o problema de Dirichlet para a equação de Poisson*

$$\begin{cases} \Delta u = -f & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

*possui uma única solução $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*

*Demonstração.* Seja $v$ o potencial Newtoniano de $f$. Pela Definição 3.5, $\Delta v = -f$ em $\Omega$ e pelo Teorema 3.9 existe uma única $w$ tal que

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{em } \Omega \\ w = v - g & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

uma vez que $\partial\Omega$ é constituído de pontos regulares e $v - g \in C^0(\partial\Omega)$. Definindo $u = v - w$, temos

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta v - \Delta w = -f & \text{em } \Omega \\ u = v - w = v - v + g = g & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

A unicidade já foi estabelecida no Corolário 3.1. □

# Capítulo 4

# Aplicações

## 4.1 Desigualdade de Heintze-Karcher e Teorema de Alexandrov

Neste capítulo faremos a primeira aplicação das ferramentas que apresentamos nestas notas de aula. Para este fim, consideraremos uma variedade Riemanniana orientável, conexa e fechada $M^n$ mergulhada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, além disso $\Omega$ será um domínio compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ com conexão de Levi-Civita $\widetilde{\nabla}$ tal que o bordo de $\Omega$ seja $M$ com a orientação dada pelo campo de vetores normais unitários $\nu$ interior a $\Omega$ ao longo de $M$, $H$ denotará a curvatura média de $M$ com respeito a $\nu$. Para não ter perigo de confusão, aqui vamos denotar por $\nabla$, $\Delta$ e $\nabla^2$ o gradiente, o laplaciano e o hessiano calculados na métrica de $M$, enquanto que $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{\Delta}$ e $\widetilde{\nabla}^2$ os respectivos entes calculados na métrica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Precisaremos do seguinte lema:

**Lema 4.1.** *Se $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \widetilde{\Delta} f = 1 & em\ \Omega \\ f = 0 & em\ M = \partial\Omega. \end{cases}$$

*Então*

$$n \int_M H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2 dM = \int_\Omega (1 - |\widetilde{\nabla}^2 f|^2)\, dx.$$

*Demonstração.* Sabendo que no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$, $\widetilde{Ric} \equiv 0$, substituindo $f$ na fórmula de Bochner, temos

$$\frac{1}{2}\widetilde{\Delta}|\widetilde{\nabla} f|^2 = \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\Delta} f)\rangle + |\widetilde{\nabla}^2 f|^2.$$

Integrando ambos os membros da igualdade acima para $\Omega$ e $f$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \widetilde{\Delta}|\widetilde{\nabla} f|^2\, dx = \int_{\Omega} \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\Delta} f)\rangle\, dx + \int_{\Omega} |\widetilde{\nabla}^2 f|^2\, dx. \tag{4.1}$$

Sendo assim, basta calcularmos separadamente cada um dos itens que não aparece na fórmula desejada. Comecemos notando que $\nabla f = 0$ em $M$, então utilizando o teorema da divergência, em seguida, os itens 1 e 3 do Lema 2.3, teremos

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega} \widetilde{\Delta}|\widetilde{\nabla} f|^2\, dx = -\frac{1}{2}\int_{M} \langle \widetilde{\nabla}|\widetilde{\nabla} f|^2, \nu\rangle\, dM = -\int_{M} \widetilde{\nabla}^2 f(\nu, f_\nu \nu)\, dM = -\int_{M} f_\nu \widetilde{\nabla}^2 f(\nu,\nu)\, dM. \tag{4.2}$$

Por outro lado, $\widetilde{\Delta} f = 1$ em $\Omega$. Então, pela primeira identidade de Green, obtemos

$$\int_{\Omega} \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\Delta} f)\rangle\, dx = -\int_{\Omega} dx - \int_{M} f_\nu \widetilde{\Delta} f dM.$$

Como $\Delta f = 0$ em $M$, vamos utilizar o item 2 do Lema 2.3 no lado direito da igualdade acima, para obtermos

$$\int_{\Omega} \langle \widetilde{\nabla} f, \widetilde{\nabla}(\widetilde{\Delta} f)\rangle\, dx = \int_{M} nHf_\nu^2\, dM - \int_{M} f_\nu \widetilde{\nabla}^2 f(\nu,\nu)\, dM - \int_{\Omega} dx. \tag{4.3}$$

Por fim, substituindo (4.2) e (4.3) em (4.1), obtemos

$$\int_{M} nHf_\nu^2\, dM = \int_{\Omega} (1 - |\widetilde{\nabla}^2 f|^2)\, dx.$$

□

**Teorema 4.1** (Heintze-Karcher)**.** *Seja $F : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa, fechada e mergulhada, e $\Omega$ o domínio compacto de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial\Omega = M$. Consideramos sobre $M$ a orientação dada pelo normal unitário $\nu$ interior a $\Omega$, e denotamos por $H$ a curvatura média correspondente a $\nu$. Se $H \neq 0$ sobre $M$, então*

$$Vol(\Omega) \leq \frac{1}{n+1}\int_{M} \frac{1}{H}\, dM \tag{4.4}$$

*ocorrendo a igualdade se, e só se, $M$ for uma esfera.*

*Demonstração.* Inicialmente, como $H \neq 0$ e $M$ é conexa, segue da Proposição 2.6 que $H > 0$ sobre $M$. Consideremos a função $f$ como no Lema 4.1, então

$$n\int_{M} H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2\, dM = \int_{\Omega} (1 - |\widetilde{\nabla}^2 f|^2)\, dx. \tag{4.5}$$

Agora utilizando a desigualdade (2.39), temos

$$1 = (\widetilde{\Delta} f)^2 \leq (n+1)|\widetilde{\nabla}^2 f|^2 \tag{4.6}$$

ou equivalentemente,

$$1 - |\widetilde{\nabla}^2 f|^2 \leq \frac{n}{n+1}.$$

Então

$$n\int_M H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2 dM \leq \frac{n}{n+1}\int_\Omega dx = \frac{n}{n+1}Vol(\Omega).$$

Por outro lado, como $\widetilde{\Delta} f = 1$ em $\Omega$ e $\nu$ é o normal interior a $\Omega$,

$$Vol(\Omega) = \int_\Omega \widetilde{\Delta} f \; dx = -\int_M \frac{\partial f}{\partial \nu}\; dM.$$

Portanto, a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais nos permite deduzir que

$$\begin{aligned} Vol(\Omega)^2 &= \Big(\int_M \frac{\partial f}{\partial \nu}\; dM\Big)^2 = \Big(\int_M \sqrt{H}\frac{\partial f}{\partial \nu}\cdot\frac{1}{\sqrt{H}}\; dM\Big)^2 \\ &\leq \int_M H\Big(\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)^2 dM \cdot \int_M \frac{1}{H}\; dM \\ &\leq \frac{1}{n+1}Vol(\Omega)\cdot\int_M \frac{1}{H}\; dM. \end{aligned}$$

Isto é,

$$Vol(\Omega) \leq \frac{1}{n+1}\int_M \frac{1}{H}\; dM.$$

Ocorrendo a igualdade se, e só se, ocorre a igualdade em (4.6), isto é

$$\widetilde{\nabla}^2 f = \frac{1}{n+1}Id_{\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Segue que $f$ deve ser da forma

$$f(x) = \frac{1}{2(n+1)}|x|^2 + \langle x, v\rangle + c$$

para algum $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $c \in \mathbb{R}$. Completando quadrados, temos

$$f(x) = \frac{1}{2(n+1)}|x + (n+1)v|^2 + c - \frac{n+1}{2}|v|^2.$$

Como $f = 0$ em $M$, vamos fazer $a = -(n+1)v$ e $d = -c + \frac{n+1}{2}|v|^2$, para obtermos

$$M = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x-a|^2 = 2(n+1)d\},$$

ou seja, $M$ é uma esfera de centro $a$ e raio $\sqrt{2(n+1)d}$. $\square$

Como aplicação do Teorema de Heintze e Karcher daremos uma demonstração do seguinte teorema devido a Alexandrov.

**Teorema 4.2** (Alexandrov). *Se $F : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície conexa, fechada e mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante $H$, então $M$ é uma esfera.*

*Demonstração.* Consideremos o domínio compacto $\Omega$ tal que $\partial\Omega = M$, bem como o normal unitário $\nu$ interior a $\Omega$ ao longo de $\partial\Omega = M$ de modo que $H > 0$ (ver Teorema 4.1). Também convém estabelecermos as seguintes notações:

$$F(p) = (x_1, \ldots, x_{n+1}), \quad \Delta F = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{n+1}) \quad \text{e} \quad \nabla F = (\nabla x_1, \ldots, \nabla x_{n+1}).$$

Pelo item 2 do Lema 2.3, temos para cada $i = 1, \ldots, n+1$,

$$\widetilde{\Delta} x_i = \Delta x_i - nH\nu(x_i) + \widetilde{\nabla}^2 x_i(\nu, \nu).$$

Como $\widetilde{\Delta} x_i = 0$ e $\widetilde{\nabla}^2 x_i = 0$, segue que $\Delta x_i = nH\nu(x_i)$. Dessa forma, temos

$$\Delta F = nH\big(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_{n+1})\big) = nH\nu(F). \tag{4.7}$$

Além disso, pelo item 1 do Lema 2.3, $\widetilde{\nabla} x_i = \nabla x_i + \nu(x_i)\nu$. Por outro lado, $\widetilde{\nabla} x_i = E_i$, onde $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim,

$$\begin{aligned} |\nabla x_i|^2 &= |\widetilde{\nabla} x_i - \nu(x_i)\nu|^2 = |\widetilde{\nabla} x_i|^2 - 2\nu(x_i)\langle \widetilde{\nabla} x_i, \nu\rangle + \nu(x_i)^2|\nu|^2 \\ &= 1 - 2\nu(x_i)\nu(x_i) + \nu(x_i)^2 = 1 - \nu(x_i)^2. \end{aligned}$$

e

$$|\nabla F|^2 = \sum_{i=1}^{n+1}(1 - \nu(x_i)^2) = n + 1 - \sum_{i=1}^{n+1}\nu(x_i)^2 = n + 1 - |\nu|^2 = n.$$

O fato de $\widetilde{\Delta} F = (0, \ldots, 0)$ e $\widetilde{\nabla} F = (\widetilde{\nabla} x_1, \ldots, \widetilde{\nabla} x_{n+1})$ implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \langle F, \widetilde{\Delta} F\rangle dx = -\int_\Omega |\widetilde{\nabla} F|^2 dx - \int_M \langle F, F_\nu\rangle dM \\ &= -(n+1) \cdot Vol(\Omega) - \int_M \langle F, \nu(F)\rangle dM \\ &\overset{(4.7)}{=} -(n+1) \cdot Vol(\Omega) - \frac{1}{nH}\int_M \langle F, \Delta F\rangle dM \\ &= -(n+1) \cdot Vol(\Omega) - \frac{1}{nH}\Big(-\int_M |\nabla F|^2 dM\Big) \\ &= -(n+1) \cdot Vol(\Omega) - \frac{1}{H} Vol(M). \end{aligned}$$

Logo,

$$Vol(M) = (n+1)HVol(\Omega). \tag{4.8}$$

Finalmente, a partir do Teorema 4.1 podemos concluir que $M$ é uma esfera. $\square$

## 4.2 Problema de Autovalor de Stekloff

Nesta seção vamos estudar o seguinte problema de autovalor sobre o bordo:

$$\begin{cases} -\Delta_g \phi &= 0 \quad \text{in } M, \\ \frac{\partial}{\partial \nu}\phi &= v\phi \quad \text{on } \partial M, \end{cases} \tag{4.9}$$

em que $\frac{\partial}{\partial \nu}$ é a derivada normal com respeito ao vetor normal unitário $\nu$ exterior a $M$ ao longo do bordo $\partial M$. Fixada uma métrica Riemanniana $g$ em $M$, é bem conhecido que o espectro do problema (4.9) é discreto bem como o traço do operador $H^1(M) \to L^2(\partial M)$ é compacto. Neste caso, os autovalores formam uma sequência $0 = v_o < v_1 \leq v_2 \leq \ldots \to \infty$, ver por exemplo [19]. Historicamente, (4.9) é conhecido como o problema de Stekloff pois foi introduzido por ele em [40] para domínios com bordo do plano. Neste caso, como tem sido bem observado em [18], este problema tem aplicações em física. A função $\phi$ representa o estado de temperatura sobre um domínio $M$ tal que fluxo sobre o bordo é proporcional à temperatura.

Em [18] Escobar discutiu algumas estimativas do primeiro autovalo não nulo $v_1$ para o problema (4.9) em termos da geometria da variedade $(M^n, g)$. Por exemplo, ele provou que um 2-dimensional disco euclidiano de raio $r^{-1}$ é rígido na classe das superfícies compactas com curvatura de Gauss não negativa e curvatura geodésica do bordo $k_g = r$, ele também observou que $k_g \geq r$ implica $v_1 \geq r$. Enquanto que em dimensão $n \geq 3$ para variedades com curvatura de Ricci não negativa, usando a fórmula de Reilly-Bochner, ele mostrou que $v_1 > k_0/2$, em que $k_0$ é uma cota superior para qualquer autovalor da segunda forma fundamental do bordo. Para mais detalhes e motivações do problema (4.9) é mais apropriado recomendarmos os trabalhos de Escobar [18] e suas referências.

(FALTA DIGITAR OS TEOREMAS COM AS DEMONSTRAÇÕES)

## 4.3 Rigidez de Quase sólitons de Ricci

Nesta seção, vamos estudar os quase sólitons de Ricci, basicamente, reescreveremos alguns resultados de [22]. Comecemos relembrando a definição de fluxo de Ricci introduzida por Hamilton no final do século 20. Dada uma família a 1-parâmetro de métricas $g(t)$ em uma variedade Riemanniana $M^n$, definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denotando por $Ric_{g(t)}$ o tensor de Ricci na métrica $g(t)$, a equação do fluxo de Ricci é

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_{g(t)}. \tag{4.10}$$

Em [23] Hamilton provou que para qualquer métrica diferenciável $g$ em uma variedade Riemanniana compacta $M^n$, existe uma única solução $g(t)$ para a equação (4.10) definida em algum intervalo $[0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, com $g(0) = g$. Para o caso completo não compacto, Shi provou em [39] a existência de uma solução completa de (4.10) sob a condição da curvatura seccional de $(M^n, g)$ ser limitada.

Um sóliton de Ricci é um fluxo de Ricci $(M^n, g(t))$, $0 \leq t < T \leq +\infty$, com a propriedade que, para cada $t \in [0, T)$, existe um difeomorfismo $\varphi_t : M^n \to M^n$ e uma constante $\sigma(t) > 0$ tal que $\sigma(t)\varphi_t^* g = g(t)$. Uma maneira para gerar sólitons de Ricci é a seguinte: consideremos uma variedade Riemanniana $(M^n, g)$, com um campo de vetores $X$ e uma constante $\lambda$ satisfazendo

$$Ric_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g. \tag{4.11}$$

Em seguida, vamos definir a função $\sigma(t) = -2\lambda t + 1$, para cada $t \in [0, T)$, com $T := +\infty$, se $\lambda \leq 0$, e $T := \frac{1}{2\lambda}$, se $\lambda > 0$. Finalmente, basta considerarmos $\varphi_t$ como a família a 1-parâmetro de difeomorfismos gerados pelo campo $Y_t(x) = \frac{X(x)}{\sigma(t)}$, para todo $x \in M^n$. Esta caracterização permite que alguns autores considerem a equação (4.11) para definirem sóliton de Ricci. Para maiores detalhes sobre o fluxo de Ricci, duas boas referências são [16] e [17].

Em [34] Pigola, Rigoli, Rimoldi e Setti estudaram a equação (4.11), com a condição adicional de que o parâmetro $\lambda$ seja uma função e $X$ um campo de vetores gradiente, a esta nova classe eles se referiram a um quase sóliton de Ricci gradiente. Posteriormente, em [5] Barros e Ribeiro consideraram a seguinte definição geral de quase sóliton de Ricci.

**Definição 4.1.** *Um quase sóliton de Ricci é uma variedade diferenciável $M^n$ munida com uma métrica Riemanniana $g$, um campo de vetores $X$ e uma função sóliton $\lambda : M \to \mathbb{R}$*

*satisfazendo*

$$Ric + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g, \tag{4.12}$$

*onde Ric denota o tensor de Ricci de $(M^n, g)$ e $\mathcal{L}_X g$ a derivada de Lie de $g$ na direção de $X$.*

Quando $X$ é o campo de vetores gradiente de alguma função diferenciável $f : M \to \mathbb{R}$, tal variedade é um quase sóliton de Ricci gradiente. Neste caso, a equação fundamental (4.12) pode ser reescrita como segue

$$Ric + \nabla^2 f = \lambda g, \tag{4.13}$$

onde $\nabla^2 f$ denota o hessiano da *função potencial* $f$.

Ressaltamos que se $\lambda$ é constante, a equação (4.12) refere-se a um sóliton de Ricci. É o que acontece quando $X$ é um campo de vetores Killing e $n \geq 3$, uma vez que neste caso a variedade é Einstein, e portanto $\lambda$ é constante. Além disso, quando o campo $X$ é nulo ou a função potencial $f$ é constante, o quase sóliton de Ricci é *trivial*, enquanto que um quase sóliton de Ricci não trivial está associado a um campo de vetores $X$ não nulo ou a uma função potencial $f$ não constante. Por exemplo, considerando o $\mathbb{R}^n$ com a sua métrica usual $g_\circ$, uma constante não nula $\lambda$ e a função $f(x) = \frac{\lambda}{2}|x|^2$, então $\nabla^2 f = \lambda g_\circ$ e $(\mathbb{R}^n, g_\circ, \nabla f, \lambda)$ é um sóliton de Ricci gradiente não trivial, este foi um dos exemplos dados por Hamilton, o qual é conhecido na literatura como sóliton gaussiano. Quanto aos exemplos de quase sólitons de Ricci, além dos já apresentados em [34], utilizaremos a definição da variedade $\mathbb{M}^n(c)$ estudada na Secção 2.2, bem como fatos já conhecidos na literatura para escreveremos o seguinte:

**Exemplo 4.1.** *Seja $(\mathbb{M}^n(c), g_\circ)$ a esfera canônica $\mathbb{S}^n(1)$ ou o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n(-1)$, de acordo com o número $c$ seja $1$ ou $-1$, respectivamente. Além disso, seja $h_v$ a função altura com respeito a um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n+1}_\tau$. Então para cada $v$, a função $\lambda_v(x) := c(n-1) - ch_v(x)$, define uma estrutura de quase sóliton de Ricci gradiente em $(\mathbb{M}^n(c), g_\circ)$ com função potencial $h_v$, uma vez que o tensor de Ricci e o hessiano de $h_v$, ambos calculados na métrica $g_\circ$, são dados por: $Ric = c(n-1)g_\circ$ e $\nabla^2 h_v = -ch_v g_\circ$.*

Assim como o sóliton de Ricci, também podemos associar um quase sóliton ao fluxo de Ricci. De fato, sejam $(M^n, g)$ uma variedade Riemanniana completa e $g(t)$ uma solução de (4.12), definida em um intervalo $[0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tal que $\varphi_t$ seja uma família a 1-parâmetro de difeomorfismos de $M^n$, com $\varphi_0 = id_M$ e $g(t)(x) = \tau(x,t)\varphi_t^* g(x)$ para todo $x \in M^n$, onde $\tau(x,t)$ é uma função real diferenciável e positiva em $M^n \times [0,\varepsilon)$, de modo que $\tau(x,0) = 1$. Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\tau(x,t)\varphi_t^* g(x) + \tau(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t^* g(x),$$

que em $t = 0$, se torna

$$-2Ric_g = -2\lambda(x)g + \mathcal{L}_X g,$$

onde $\lambda(x) = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\tau(x,0)$ e $X = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0)$, logo $(M^n, g, X, \lambda)$ é um quase sóliton de Ricci.

A seguir estabeleceremos algumas propriedades e condições de rigidez dos quase sólitons de Ricci gradiente. Para os não gradientes, nos restringiremos ao caso compacto, conforme Teorema 4.3. Comecemos recordando a fórmula integral abaixo, que foi provada em [5]. Contudo, apresentaremos outra prova deste fato, onde utilizaremos uma técnica que consiste na escolha apropriada de um $(0,2)$-tensor simétrico e de um campo de vetores na variedade, para então aplicarmos o Lema 2.1. Ressaltamos ao leitor que tal técnica será aproveitada para o estudo de quase sóliton de Ricci não gradiente compacto, conforme veremos a frente.

A partir de agora, assumiremos que todas as variedades com estrutura de quase sóliton de Ricci serão completas, conexas e orientáveis, além disso, as compactas serão sempre sem bordo.

**Lema 4.2.** *Seja* $\big(M^n, g, \nabla f, \lambda\big)$ *um quase sóliton de Ricci gradiente. Então,*

$$\big|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\big|^2 = -\frac{1}{2}\Delta S + (n-1)\Delta\lambda + \frac{S}{n}\Delta f + \frac{1}{2}g(\nabla S, \nabla f). \tag{4.14}$$

*Em particular, se $M^n$ é compacta, vamos ter a seguinte fórmula integral*

$$\int_M \big|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n} g\big|^2 dM = \frac{(n-2)}{2n}\int_M g(\nabla S, \nabla f) dM. \tag{4.15}$$

*Demonstração.* Com efeito, segue do Lema 2.1 e da segunda identidade de Bianchi contraída que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) &= (\operatorname{div}\nabla^2 f)(\nabla f) + |\nabla^2 f|^2\\
&= (\operatorname{div}(\lambda I - Ric))(\nabla f) + \big|\mathring{\nabla}^2 f\big|^2 + \frac{1}{n}(\Delta f)^2\\
&= g(\nabla\lambda, \nabla f) - \frac{1}{2}g(\nabla S, \nabla f) + \big|\mathring{\nabla}^2 f\big|^2 + \frac{1}{n}(\Delta f)(n\lambda - S),
\end{aligned}$$

donde

$$\big|\mathring{\nabla}^2 f\big|^2 = \operatorname{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) - \operatorname{div}(\lambda\nabla f) + \frac{1}{2}g(\nabla S, \nabla f) + \frac{S}{n}\Delta f, \tag{4.16}$$

ou ainda

$$\big|\mathring{\nabla}^2 f\big|^2 = \mathrm{div}\Big(\nabla^2 f(\nabla f) - \lambda\nabla f + \frac{S}{n}\nabla f\Big) + \frac{(n-2)}{2n} g(\nabla S, \nabla f). \tag{4.17}$$

Então, a fórmula integral (4.15) segue por integração de (4.17). Por outro lado, aplicando a função potencial $f$ na versão dual da fórmula contraída de Bochner, obteremos

$$-\frac{1}{2}\nabla S + \nabla\lambda = \mathrm{div}(-Ric + \lambda I) = \mathrm{div}\nabla^2 f \overset{(2.44)}{=} \nabla\Delta f + Ric(\nabla f) = \nabla(n\lambda - S) + Ric(\nabla f),$$

donde

$$Ric(\nabla f) = \frac{1}{2}\nabla S - (n-1)\nabla\lambda, \tag{4.18}$$

assim, pela equação fundamental (4.13),

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\nabla^2 f(\nabla f)) &= \mathrm{div}(\lambda\nabla f) - \mathrm{div}(Ric(\nabla f)) \\ &= \lambda\Delta f + g(\nabla\lambda, \nabla f) - \frac{1}{2}\Delta S + (n-1)\Delta\lambda. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Finalmente, basta substituirmos (4.19) em (4.16), para obtermos (4.14). □

Prosseguindo, observemos que a equação fundamental (4.13) implica que

$$Ric - \frac{S}{n}g + \nabla^2 f = \lambda g - \frac{S}{n}g = \frac{\Delta f}{n}g.$$

Portanto, em todo quase sóliton de Ricci gradiente, sempre teremos

$$\big|Ric - \frac{S}{n}g\big|^2 = \big|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g\big|^2. \tag{4.20}$$

Em [33] Petersen e Wylie provaram que: se um sóliton de Ricci gradiente é Einstein, então ou $\nabla^2 f = 0$, ou é o sóliton gaussiano. De fato, isto segue imediatamente da equação (4.20) e do Teorema 2 de Tashiro [41]. Contudo, para um quase sóliton de Ricci gradiente Einstein (com curvatura escalar constante para o caso dois dimensional), o resultado é bem diferente. Neste caso, ocorre que

$$\nabla^2 f = \Big(-\frac{S}{n(n-1)}f + c - \frac{S}{n}\Big)g, \tag{4.21}$$

para alguma constante $c$. De fato, desde que $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ é Einstein, pela equação (4.13)

$$\nabla^2 f = \Big(\lambda - \frac{S}{n}\Big)g. \tag{4.22}$$

Por outro lado, pela equação (4.18)

$$\nabla\Big(\frac{S}{n(n-1)}f + \lambda\Big) = 0.$$

Donde $\lambda + \frac{S}{n(n-1)}f = c$, para alguma constante $c$, assim basta substituirmos o valor de $\lambda$ na equação (4.22) para obtermos (4.21).

Petersen e Wylie [33] também estudaram os sólitons de Ricci estaciorários com curvatura escalar constante. Utilizando a mesma ideia desses autores veremos que todo sóliton de Ricci gradiente $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ estacionário, com curvatura escalar atingindo um máximo, é Einstein com curvatura escalar nula. Portanto, a função potencial $f$ é tal que $\nabla^2 f = 0$. Com efeito, pelo Lema 4.2 e pela equação (4.20),

$$\frac{1}{2}\Delta_f(-S) = \big|Ric - \frac{S}{n}g\big|^2 + \frac{S^2}{n} \geq 0,$$

onde $\Delta_f S = \Delta S - g(\nabla S, \nabla f)$. Desde que o operador $\Delta_f$ é elíptico, segue-se do princípio do máximo forte de Hopf, que $Ric = \frac{S}{n}g$ e $S = 0$. Então, novamente por (4.20), $\nabla^2 f = 0$, como havíamos afirmado. Ademais, se $f$ não é constante, isto implica $|\nabla f| = k$, para alguma constante $k \neq 0$. Desta forma, através de um argumento tipo Cheeger-Gromoll usamos o fluxo de $\nabla f$ para definirmos uma isometria entre $(M^n, g)$ e um cilindro $\mathbb{R} \times N^{n-1}$ sobre uma hipersuperfície totalmente geodésica $N^{n-1} \subset M^n$, para maiores detalhes ver por exemplo o item $(b.2)$ do Teorema 1.3 em [34].

O resultado seguinte estabelece uma condição de rigidez para um quase sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante.

**Proposição 4.1.** *Seja $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$ um quase sóliton de Ricci gradiente com curvatura escalar constante $S$. Suponha que $\lambda + \frac{S}{n(n-1)}f$ atinge um máximo, então esta função é constante em $M^n$ e a função sóliton $\lambda$ satisfaz a seguinte equação diferencial parcial*

$$\Delta\lambda + \frac{S}{n-1}\lambda = \frac{S^2}{n(n-1)}.$$

*Em particular, se $\lambda$ ou $f$ não for constante, então para $S \geq 0$, $M^n$ é isométrica a uma esfera euclidiana.*

*Demonstração.* Pelo Lema 4.2,

$$\frac{1}{n-1}\big|\nabla^2 f - \frac{\Delta f}{n}g\big|^2 = \Delta\big(\lambda + \frac{S}{n(n-1)}f\big) \geq 0.$$

Como estamos supondo que $\lambda + \frac{S}{n(n-1)}f$ atinge um máximo, segue-se do princípio do máximo forte de Hopf que

$$\lambda + \frac{S}{n(n-1)}f = c, \tag{4.23}$$

para alguma constante $c$. Além disso, pela equação fundamental (4.13),

$$\Delta\lambda = -\frac{S}{n(n-1)}\Delta f = \frac{S}{n(n-1)}(S - n\lambda) = \frac{S^2}{n(n-1)} - \frac{S}{(n-1)}\lambda. \tag{4.24}$$

O que prova a primeira parte. Em particular, pela equação (4.23), $\lambda$ não é constante se, e somente se, $f$ não é constante. Desde que $\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} g$, a equação (4.20) implica que $(M^n, g)$ é Einstein. Logo, pela equação (4.21),

$$\nabla^2 f = \Big(-\frac{S}{n(n-1)}f + c - \frac{S}{n}\Big)g. \tag{4.25}$$

Ademais, $S > 0$, caso contrário por (4.23), $\lambda$ seria constante. Desta forma, podemos aplicar o Teorema 2 devido a Tashiro em [41] para concluir que $M^n$ é isométrica a uma esfera euclidiana. $\square$

A Proposição 4.1, permite-nos caracterizar as estruturas de quase sóliton de Ricci gradiente na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Vamos escrever este fato como um exemplo.

**Exemplo 4.2.** *Para cada vetor não nulo $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, considere as funções $\lambda_a(x) = -\langle x, a\rangle + n - 1$ e $f_a(x) = -\lambda_a(x) + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é o vetor posição, então $(\mathbb{S}^n, g, \nabla f_a, \lambda_a)$ são as únicas estruturas não triviais, de quase sóliton de Ricci gradiente em $\mathbb{S}^n$.*

Com efeito, suponha que $(\mathbb{S}^n, g, \nabla f, \lambda)$ seja um quase sóliton de Ricci gradiente não trivial, onde $g = \langle , \rangle$ é a métrica usual induzida de $\mathbb{R}^{n+1}$. Como a sua curvatura escalar $S$ é constante e igual a $n(n-1)$, segue da Proposição 4.1, que $\lambda + f$ é constante e

$$\Delta\lambda + n\lambda = n(n-1). \tag{4.26}$$

Por outro lado, já é conhecido que $\nabla^2\langle x, a\rangle = -\langle x, a\rangle g$ (ver, por exemplo [2]). Logo, a função $\lambda_a$ descrita neste exemplo é tal que, $\Delta\lambda_a = n\langle x, a\rangle = n(n-1-\lambda_a)$, isto é, $\lambda_a$ satisfaz a equação (4.26). Em verdade, qualquer outra solução de (4.26) tem esta forma. Para ver isto, suponha que $\tilde{\lambda}$ seja outra solução de (4.26), defina $\psi = \tilde{\lambda} - \lambda_a$ e note que $\Delta\psi = -n\psi$, então para algum vetor não nulo $b \in \mathbb{R}^{n+1}$ teremos $\psi(x) = \langle x, b\rangle$ (ver, por exemplo [7]). Assim

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \langle x, b\rangle + \lambda_a = \langle x, b\rangle - \langle x, a\rangle + n - 1 \\ &= -\langle x, \tilde{a}\rangle + n - 1, \end{aligned}$$

onde $\tilde{a} = a - b$, como havíamos afirmado. Ademais, se $c$ é uma constante, então para as funções $\lambda_a$ e $f_a = -\lambda_a + c$, teremos

$$\nabla^2 f_a = -\nabla^2 \lambda_a = \nabla^2 \langle x, a\rangle = -\langle x, a\rangle g,$$

logo

$$Ric_g + \nabla^2 f_a = (n-1)g - \langle x, a\rangle g = \{(n-1) - \langle x, a\rangle\}g = \lambda_a g.$$

Consequentemente, $\lambda = \lambda_a$ e $f = f_a$, para cada vetor não nulo $a \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Nosso próximo objetivo será estender o Lema 4.2 para quase sólitons de Ricci não necessariamente gradientes. Para isto, precisaremos do resultado a seguir, o qual será uma ferramenta fundamental para aplicarmos as técnicas que já começamos a desenvolver na prova do referido lema.

**Lema 4.3.** *Para um quase sóliton de Ricci $(M^n, g, X, \lambda)$, vale*

$$\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_X g)Z\big) = 2\mathrm{div}(\lambda Z) - g(\nabla S, Z) - 2\langle \nabla Z, Ric\rangle,$$

*para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$.*

*Demonstração.* Fazendo $T = \mathcal{L}_X g$ e $\varphi = 1$ no Lema 2.1, e posteriormente usando a equação fundamental (4.12) e a segunda identidade de Bianchi contraída, teremos para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\big((\mathcal{L}_X g)Z\big) &= \big(\mathrm{div}(2\lambda I - 2Ric)\big)Z + \langle \nabla Z, 2\lambda I - 2Ric\rangle \\
&= 2g(\nabla\lambda, Z) - g(\nabla S, Z) + \langle \nabla Z, 2\lambda I - 2Ric\rangle \\
&= 2g(\nabla\lambda, Z) - g(\nabla S, Z) + 2\lambda\mathrm{div}Z - 2\langle \nabla Z, Ric\rangle,
\end{aligned}$$

que finaliza a prova o lema. □

No caso compacto, podemos usar o teorema da decomposição de Hodge-de Rham para decompor o campo $X$ como segue:

$$X = Y + \nabla h,$$

onde $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que $\mathrm{div}Y = 0$, e $h$ é a função potencial de Hodge-de Rham. Então, teremos a proposição seguinte.

**Proposição 4.2.** *Para um quase sóliton de Ricci compacto* $\big(M^n, g, X, \lambda\big)$, *vale*

$$\int_M \big|Ric - \frac{S}{n}g\big|^2 dM = \frac{n-2}{2n}\int_M g(\nabla S, X)dM. \tag{4.27}$$

*Demonstração.* Desde que $X = Y + \nabla h$, onde $Y$ é um campo de vetores em $M^n$ com divergente nulo e $h$ é a função potencial de Hodge-de Rham, podemos reescrever a equação fundamental (4.12) da seguinte forma:

$$Ric + T_h = \lambda I, \tag{4.28}$$

onde $T_h = \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g + \nabla^2 h$. Além disso, tomando o traço na equação (4.28), temos $\Delta h = n\lambda - S$. Em seguida, pelo Lema 2.1 e pela segunda identidade de Bianchi contraída,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(T_h(\nabla h)) &= (\mathrm{div}T_h)(\nabla h) + \langle \nabla^2 h, T_h\rangle \\
&= (\mathrm{div}(\lambda I - Ric))(\nabla h) + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g + \nabla^2 h\rangle \\
&= g(\nabla\lambda, \nabla h) - \frac{1}{2}g(\nabla S, \nabla h) + |\nabla^2 h|^2 + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g\rangle.
\end{aligned}$$

Como $|\nabla^2 h|^2 = \big|\mathring{\nabla}^2 h\big|^2 + \frac{1}{n}(\Delta h)^2$, teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(T_h(\nabla h)) &= g(\nabla\lambda, \nabla h) - \frac{1}{2}g(\nabla S, \nabla h) + \big|\mathring{\nabla}^2 h\big|^2 + \frac{1}{n}(\Delta h)^2 + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g\rangle \\
&= g(\nabla\lambda, \nabla h) - \frac{1}{2}g(\nabla S, \nabla h) + \big|\mathring{\nabla}^2 h\big|^2 + \frac{1}{n}(\Delta h)(n\lambda - S) + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g\rangle \\
&= g(\nabla\lambda, \nabla h) + \lambda\Delta h - \frac{1}{2}g(\nabla S, \nabla h) - \frac{S}{n}\Delta h + \big|\mathring{\nabla}^2 h\big|^2 + \langle \nabla^2 h, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g\rangle,
\end{aligned}$$

que integrando obtemos

$$\int_M \big|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\big|^2 dM = \frac{n-2}{2n}\int_M g(\nabla S, \nabla h)dM - \frac{1}{2}\int_M \langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g\rangle dM. \tag{4.29}$$

Em seguida, a partir de equação (4.28), obtemos

$$\nabla^2 h - \lambda g + \frac{S}{n}g = -Ric + \frac{S}{n}g - \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g.$$

Então,

$$\big|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\big|^2 = \big|Ric - \frac{S}{n}g\big|^2 + \big\langle \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g, \frac{1}{2}\mathcal{L}_Y g\big\rangle + \langle Ric, \mathcal{L}_Y g\rangle, \tag{4.30}$$

ou ainda, novamente pela equação (4.28)

$$\begin{aligned}
\big|\nabla^2 h - \frac{\Delta h}{n}g\big|^2 &= \big|Ric - \frac{S}{n}g\big|^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g\rangle - \frac{1}{2}\langle Ric, \mathcal{L}_Y g\rangle + \langle Ric, \mathcal{L}_Y g\rangle \\
&= \big|Ric - \frac{S}{n}g\big|^2 - \frac{1}{2}\langle \nabla^2 h, \mathcal{L}_Y g\rangle + \frac{1}{2}\langle Ric, \mathcal{L}_Y g\rangle.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Por outro lado, o teorema da divergência combinado com os Lemas 4.3 e 2.2 mostram que

$$0 = 2\int_M \langle \nabla Y, Ric\rangle dM = \int_M \langle \mathcal{L}_Y g, Ric\rangle dM. \tag{4.32}$$

Finalmente, a equação (4.27) segue por integração da equação (4.31) combinada com a equação (4.32) e a equação (4.29). □

Note que, fazendo $X = \nabla f$ na equação (4.27), obteremos o caso compacto do Lema 4.2. Ademais, a referida equação também foi provada por Barros, Ribeiro e Batista em [6], onde eles utilizaram uma técnica diferente da aplicada acima, e obviamente, eles também obtiveram o resultado do teorema abaixo.

**Teorema 4.3.** *Um quase sóliton de Ricci compacto não trivial* $\big(M^n, g, X, \lambda\big)$*,* $n \geq 3$*, com curvatura escalar constante* $S$*, é isométrico a uma esfera euclidiana* $\mathbb{S}^n(r)$*. Além disso, ele é gradiente e a função potencial é uma autofunção correspondente ao primeiro autovalor não nulo de* $\mathbb{S}^n(r)$*, onde* $r = \sqrt{n(n-1)/S}$ *é o raio da esfera.*

*Demonstração.* Como $S$ é constante, segue da equação (4.27) que $(M^n, g)$ é Einstein e portanto $X$ é um campo de vetores conforme não trivial (não homotético), uma vez que $\lambda$ é não constante. Então, podemos escrever

$$\mathcal{L}_X g = 2\rho g, \tag{4.33}$$

em que

$$\rho = \frac{\mathrm{div} X}{n} = \left(\frac{n\lambda - S}{n}\right). \tag{4.34}$$

Além disso, o fator conforme $\rho$ satisfaz a seguinte equação (ver por exemplo p.28 em [42]):

$$\nabla^2 \rho = -\frac{S}{n(n-1)}\rho g. \tag{4.35}$$

Como $\rho$ é não constante, segue que $\frac{S}{n-1}$ é um autovalor não nulo do laplaciano, donde $S > 0$. Consequentemente, $M^n$ é isométrica a uma esfera $\mathbb{S}^n(r)$, em que $r = \sqrt{n(n-1)/S}$ é o raio da esfera, conforme [31]. Ademais, $\rho$ é uma autofunção correspondente ao primeiro autovalor não nulo $\lambda_1 = S/(n-1)$ da esfera $\mathbb{S}^n(r)$. Escrevendo

$$u = -\frac{n(n-1)}{S}\rho, \tag{4.36}$$

obtemos,

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\nabla u} g = \nabla^2 u = -\frac{n(n-1)}{S}\nabla^2 \rho = \rho g = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g. \tag{4.37}$$

Isso completa a prova do teorema. Cabe ressaltar que, a menos de constantes e homotetia, o resultado do presente teorema é exatamente como no Exemplo 4.2. □

# Bibliografia


[1] Alexandrov, A. D. *Uniqueness Theorems for surfaces in the Large I*. Vestnik Leningrad univ. 11 (1956) 5-17.

[2] Alías, L. J. ; Brasil, A. ; Perdomo, O. *A characterization of quadric constant mean curvature hypersurfaces of spheres*. J. Geom Anal. 18 (2008) 687-703.

[3] Barros, A.; Gomes, J. N. *A compact gradient generalized quasi-Einstein metric with constant scalar curvature*. J. Math. Anal. Appl. 401 (2013) 702-705.

[4] Barros, A.; Gomes, J. N.; Ribeiro, E. *A note on rigidity of the almost Ricci soliton*. Arch. der Math. 100 (2013) 481-490.

[5] Barros, A. ; Ribeiro Jr., E. *Some characterizations for compact almost Ricci solitons*. Proc. of the Amer. Math. Soc.140 (2012) 1033-1040.

[6] Barros, A.; Batista, R.; Ribeiro Jr, E. *Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient*. Monatsh. Math. 174 (1) (2014) 29-39.

[7] Berger, M. ; Gauduchon, P. ; Mazet, E. *Le Spectre d'une Varièt̀è Riemannienne*. New York: Springer-Verlag, 1971. (Lectures Notes in Mathematics, v. 194)

[8] Biezuner, R. J. *Equações Diferenciais Parciais I/II*. Notas de Aula, Minas Gerais, 2010.

[9] Brendle, S. *Constant mean curvature surfaces in warped product manifolds*. Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 117 (2013) 247-269.

[10] Brickell, F.; Clark, R. S. *Differrential Manifolds*. Van Nostrand Reinhold Co., London, 1973.

[11] Catino, G. *Generalized quasi-Einstein manifolds with harmonic weyl tensor*. Math. Z. 271 (2012) 751-756

[12] Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.

[13] Carmo, M. P. *O Método do Referencial Móvel.* Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[14] Carmo, M. P. *Formas Diferenciais e Aplicações.* 8º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.

[15] Cheeger, J. *Finiteness theorems for Riemannian manifolds.* Amer. J.Math. 92 (1970) 61-74.

[16] Chow, B. ; Lu, P. ; Ni, L. *Hamilton's Ricci flow.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics, v. 77)

[17] Chow, B. ; Knopf, D. *The Ricci flow: an introduction.* Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004 (Mathematical surveys and monographs, v. 110)

[18] Escobar, J. F. *The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue.* J. Funct. Anal. 150 (1997) 544–556.

[19] Escobar, J. F. *Topics in PDEs and Diferential Geometry.* XII School of Differential Geometry, Goiânia, Brazil, July 2002.

[20] Furlanetto, J. R. *Sobre Equações Elípticas e Aplicações.* Dissertação(Mestrado em Matemática), Curitiba, 2007.

[21] Gilbarg, D.; Trudinger N. S. *Eliptic Partial Differrential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, New York, 2001.

[22] Gomes, J. N. *Rigidez de Superfícies de Contato e Caracterização de Variedades Riemannianas Munidas de um Campo Conforme ou de Alguma Métrica Especial.* Tese de Doutorado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, (2012).

[23] Hamilton, R. S. *Three-manifolds with positive Ricci curvature.* J. Diff. Geom. 17 (2) (1982) 255-306.

[24] Heintze, E.; Karcher H. *A general comparison theorem with applications to volume estimates for submanifolds.* Ann. Sci. École Norm. 11 (1978) 451-470.

[25] Klingenberg, W. *Contributions to Riemannian Geometry in the large.* Ann. of Math. 69 (1959) 654-666.

[26] Lee, J. M. *Introduction to smooth Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2003.

[27] Lee, J. M. *Introduction to Topological Manifolds.* Springer-Verlag, New York, 2011.

[28] Lee, J. M. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[29] Lima, E. L. *Curso de Análise*, vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.

[30] Mesquita, R. R. *Fórmulas variacionais tipo Hadamard para os autovalores do $\eta$-laplaciano e aplicações.* Tese de Doutorado, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, (2014).

[31] Obata, M. *Certain conditions for a Riemannian manifold isometric with a sphere.* J. Math. Soc. Japan 14 (1962) 333-340.

[32] Petersen, P. *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[33] Petersen, P. ; Wylie, W. *Rigidity of gradient Ricci solitons.* Pacific J. of Math. 241 (2) (2009) 329-345.

[34] Pigola, S. ; Rigoli, M. ; Rimold, M. ; Setti, A. *Ricci almost solitons.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) 10 (4) (2011) 757-799.

[35] Rauch, H. E. *A contribution to differential geometry in the large.* Ann. of Math. 54 (1951) 38-55.

[36] Ros, A. *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures.* Revista Matemática Iberoamericana 3 (1987) 447-453.

[37] Rosenberg, H. *Hypersurfaces of constant curvature in space forms.* Bull. Sc. Math. 117 (1993) 217-239.

[38] Spivak, M., *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, 1979.

[39] Shi, W.-X. *Deforming the metric on complete Riemannian manifolds*. J. Diff. Geom. 30 (1) (1989) 223-301.

[40] Stekloff, M. W. *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique*. Ann. Sci. École Norm. Sup. 19 (1902) 455–490.

[41] Tashiro, Y. *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*. Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965) 251-275.

[42] Yano, K. *Integral formulas in Riemannian geometry*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.