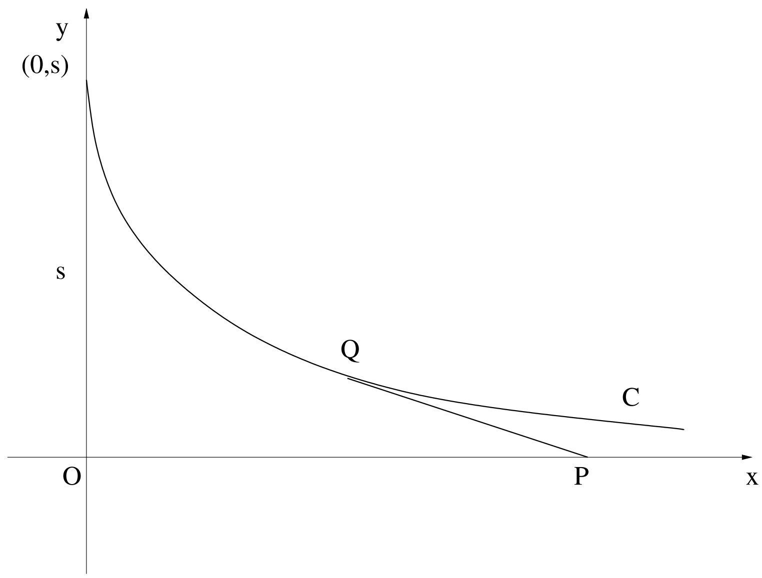
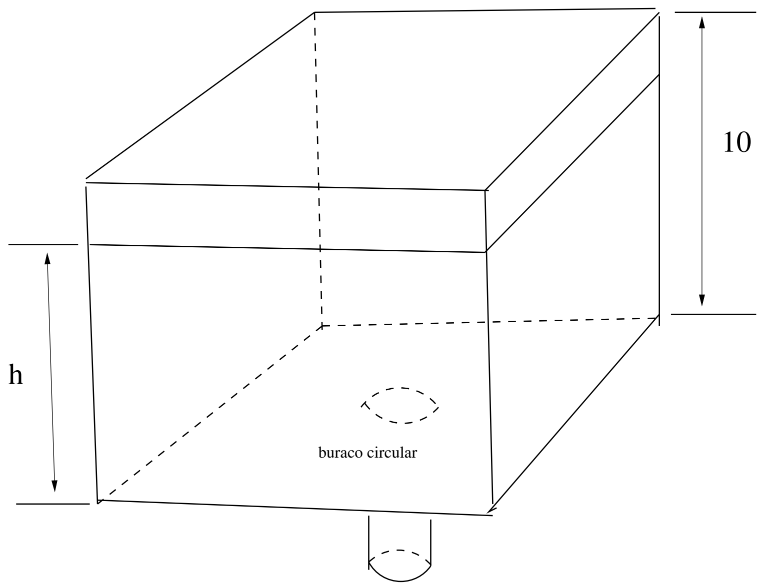
MAT0130 - Equações Diferenciais I

1a. Lista de Exercícios - 1o. semestre de 2020

1. Uma pessoa P, começando na origem, move-se no sentido positivo do eixo x, puxando um peso Q ao longo da curva C, chamada de **tatriz**, conforme mostra a figura 1. O peso, inicialmente localizado sobre o eixo y em $(0, s)$, é puxado por uma corda de comprimento constante s, a qual é mantida esticada durante todo o movimento.Determine uma uma equação diferencial para a trajetória do peso. Suponha que a corda seja sempre tangente a C.



2. Suponha que água está saindo de um tanque por um buraco circular em sua base de área A_h. Quando a água vaza pelo buraco, o atrito e a contração da corrente de água nas proximidades do buraco reduzem o volume de água que está vazando do tanque por segundo para $cA_h\sqrt{2gh}$, onde c $(0 < c < 1)$ é uma constante empírica. Determine uma equação diferencial para a altura da água h no instante t para um tanque cúbico, como na figura 3. O raio do buraco é de 2 cm.



3. Determine todas as soluções das seguintes equações:

   (a) $\dot{x} = te^t$
   (b) $\dot{x} = t\log(t^2 - 1)$
   (c) $\dot{x} = x^2 - 4$
   (d) $\dot{x} = \sec x$
   (e) $\dot{x} = -(t+1)x/t$
   (f) $\dot{x} = t^3(x+1)^{-2}$
   (g) $\dot{x} = (x+t)/t$
   (h) $\dot{x} = (x - \sqrt{x^2+t^2})/t$
   (i) $\dot{x} = \frac{3x^2-t^2}{2tx}$
   (j) $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+y}{y-2x}$
   (k) $(x - \sqrt{xy})\frac{dy}{dx} = y$
   (l) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x+1}$

4. Resolva cada um dos problemas de valor inicial

   (a) $2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0$, $y(1) = 1$
   (b) $3x^2 + 4xy + (2y + 2x^2)\frac{dy}{dx} = 0$, $y(0) = 1$
   (c) $3xy + y^2 + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0$, $y(2) = 1$
   (d) $t^2(1+y^2) + 2y\frac{dy}{dt} = 0$, $y(0) = 1$
   (e) $\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{y+t^2y}$, $y(2) = 3$
   (f) $\frac{dy}{dt} = \frac{3t^2+4t+2}{2(y-1)}$, $y(0) = -1$
   (g) $\frac{dy}{dt} = k(a-y)(b-y)$, $y(0) = 0$ $\quad (k, a, b > 0)$

(h) $\frac{dy}{dt} = y + \sqrt{t^2 + y^2}$, $y(1) = 0$

5. Determine a constante a de modo que a equação dada seja exata e resolva a equação resultante:

   (a) $x + ye^{2xy} + axe^{2xy}\frac{dy}{dx} = 0$

   (b) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{(ax+1)}{y^3}\frac{dy}{dx} = 0.$

6. Determine todas as funções $f(x)$ tais que a equação diferencial

$$y^2 \operatorname{sen} x + yf(x)\frac{dy}{dx} = 0$$

   seja exata. Resolva a equação para essas funções f.

7. Mostre que se $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)/M$ só depende de y, então a equação $M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$ admite um fator integrante que só depende de y. Formule (e prove) uma condição suficiente para que o fator integrante dependa apenas de x.

8. Determine um fator integrante e resolva:

   (a) $(x^2 + y^2) + (x^3 + 3xy^2 + 2xy)\frac{dy}{dx} = 0$

   (b) $(3y^2 - x^2 + 1) + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$

   (c) $(3xy - 4y) + (2x^2 - 4x)\frac{dy}{dx} = 0$

   (d) $(xy^2 + 2) + 3x^2y\frac{dy}{dx} = 0.$

9. (a) Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x)y^n$$

   é denominada uma *equação de Bernoulli*. Aqui, n é uma constante real e f e g são funções contínuas num intervalo (a, b). Mostre que a mudança $z = y^{1-n}$ transforma uma equação de Bernoulli numa equação linear .

   (b) Resolva as seguintes equações:

   i. $\frac{dy}{dx} + y = xy^3$

   ii. $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = y^{\frac{1}{2}}$

   iii. $\frac{dp}{dt} = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p.$

10. (a) Uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) + f_2(x)y + f_3(x)y^2 \quad (*)$$

   é denominada uma *equação de Riccati*. Suponha que y_p é uma solução particular de (*). Prove que a mudança $y = y_p + \frac{1}{v}$ transforma (*) na equação linear

$$\frac{dv}{dx} = -\left(f_2(x) + 2f_3(x)y_p(x)\right)v + f_3(x).$$

   (b) Ache a solução geral de cada uma das seguintes equações:

   i. $y' = xy^2$

ii. $y' = \frac{2x+3y}{y-3x}$

iii. $y' + y = y^2$

iv. $y' = x^2 y + 2$

v. $y = y + \cos x$

vi. $y' = \frac{x+1}{y^2+1}$

vii. $y' = \frac{3xy+2}{x^2+1}$

viii. $y' = \frac{x^2+2y+1}{3y-2x-1}$

ix. $y' + xy = xy^3$.