MAT320 - Introdução à Análise Complexa

2^a. Lista de Exercícios - 05/04/008

1. Mostre que o semiplano $y > 2x - 3$ é um conjunto aberto.

2. (a) Mostre que a união de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
   (b) Dê um contra-exemplo para mostrar que a união de conjuntos fechados pode não ser fechado.
   (c) Mostre que a interseção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

3. Determine o domínio de cada uma das funções abaixo e represente-o geometricamente (no plano cartesiano). Determine também $Ref(z)$ e $Imf(z)$.
   a) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2-|z-i|}}$ b)$f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ c) $f(z) = \frac{1}{2-Re(\bar{z}i)}$

4. Estabeleça os limites abaixo diretamente da definição.
   a) $\lim_{z\to -3i}(z^2 - 5z) = -9 + 5i$. b) $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2-1}{z-3} = \infty$.
   c) $\lim_{z\to\infty} \frac{6z+7}{2z-3} = 3$. d) $\lim_{z\to i} \frac{7}{z^2+1} = \infty$.

5. Prove que as funções abaixo são contínuas em todos os pontos de seus domínios diretamente da definição.
   a) $f(z) = z^2$. b) $f(z) = 1/z$.

6. Prove que se $f(z)$ é contínua em z_0 então $|f(z)|$ também o é. Vale a recíproca?

7. Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções abaixo e verifique se as mesmas são deriváveis em $z_0 = 0$.
   a) $f(z) = \bar{z}$ b) $f(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}$ c) $f(z) = z + 1z^2 - i$

8. Verifique se as funções abaixo são analíticas no plano todo.
   a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$ b)$f(z) = xy + iy$
   c) $f(z) = \text{sen}x\cosh y + i\cos x\,\text{senh}y$ d) $f(z) = e^y(\cos x + i\text{sen}x)$
   e) $f(z) = e^{-y}(\cos x + i\text{sen}x)$ f) $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}(\cos y - i\text{sen}y)$

9. Mostre que a função $f(z) = z^2\bar{z}$ não é derivável em nenhum ponto do plano.

10. Dada a função $w = z^2 = u + iv$, faça o gráfico das curvas das famílias $u(x, y) = c_1$ e $v(x, y) = c_2$, e observe que essas curvas se cruzam em ângulo reto. Faa o mesmo para $w = 1/z$.

11. Sabendo que a parte real de uma função analítica é $u(x, y) = 2x(1 - y)$, determine como deve ser sua parte imaginária.

12. Mostre que a função $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$ não pode ser a parte real de uma função analítica.

13. Mostre que se uma função analítica no plano todo é da forma $f(z) = u(x) + iv(y)$ então f é linear afim (isto é $f(z) = az + b$.

14. Encontre todas as soluções de

    a) $e^z = 1$ b) $e^z = i$ c) $e^z = -3$ d) $e^z = 1 + i$

15. Mostre que, se f é analítica em uma região D e, em cada ponto z de D $f(z) = 0$ ou $f'(z) = 0$ então f é constante. (Sug: considere f^2).

16. Demonstre que $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$ no sentido de igualdade de valores.

17. Calcule todas as determinações das seguintes potências:

    a) $(1 + i)^i$. b) $(1 + \sqrt{3})^i$ c) $(1 - i)^i$.