MAT320 - Introdução à Análise Complexa

2o. semestre de 2003

2a. Lista de Exercícios - 25/08/03

1. Representar na forma trigonométrica
   (a) $1+\sqrt{3}i$
   (b) $-1+i$
   (c) -8
   (d) $-\sqrt{3}-i$
   (e) 5
   (f) $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.
2. Resolva (em $\mathbb{C}$) as equações
   (a) $z^3=i$
   (b) $z^4=-16$
   (c) $z+z^2+z^3=0$
   (d) $z^2=\bar{z}$
   (e) $z^3=2i$
   (f) $z^3=-1$.
3. Se $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, calcule
   (a) z^6
   (b) $1+z+z^2+\cdots+z^{47}$.
4. Determine as raízes quadradas de
   (a) $z=-4$
   (b) $z=3-4i$
   (c) $z=i$.
5. Ache todos os valores de
   (a) $(2+2i)^{3/2}$
   (b) $(-1)^{-3/4}$

(c) $(-1+i\sqrt{3})^{1/3}$

6. Expresse na forma $a+bi$ as raízes da unidade de ordem 5 e 6 e as represente geometricamente.

7. Seja $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\omega^n = 1.$, $\omega \neq 1$. Mostre que

   (a) $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$

8. Seja $z \in \mathbb{C}$ e $z \neq 1$. Mostre que

$$1+z+z^2+\cdots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

9. Usando o exercício 8, prove que

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta = \frac{1}{2}+\frac{\text{sen}(n+1/2)\theta}{2\text{sen}(\theta/2)}$$

10. Mostre que a fórmula usual de resolução da equação quadrática resolve a equação $az^2+bz+c=0$ com coeficientes a, b, c complexos.

11. Calcule

    (a) $(3-3i)^7$

    (b) $\frac{(5+2i)^{11}}{(1+i)^8}$

    (c) $(2-3i)^{-6}$.

12. Sejam $z \in \mathbb{C}^*$ $m, n \in \mathbf{Z}$. Prove que

    (a) $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$

    (b) Conclua que $\sqrt{z^n} = z^{\frac{n}{m}}$.

13. Suponha que $z \cdot w \neq 0$ e mostre que

    (a) $Re(zw) = |z||w| \Longleftrightarrow argw = arg\bar{z} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

    (b) $|z+w| = |z|+|w| \Longleftrightarrow argw = argz + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

    (c) $|z-w| = ||z|-|w|| \Longleftrightarrow argw = argz + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

14. Descreva geometricamente cada uma das regiões

    (a) $|Rez| < 2$

    (b) $|z-4| > 3$

(c) $\mathrm{Im}(z) \geq 1$

(d) $|z-3| \leq 2$

(e) $|z-1+3i| \leq 1$

(f) $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}, z \neq 0$

(g) $-\pi < \arg(z) < \pi$ e $|z| > 2$.